



**МОСКОВСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**



*Председатель*  
**Л.А. ПУЧКОВ**

*Зам. председателя*  
**Л.Х. ГИТИС**

*Члены редсовета*  
**И.В. ДЕМЕНТЬЕВ**

**А.П. ДМИТРИЕВ**

**Б.А. КАРТОЗИЯ**

**В.В. КУРЕХИН**

**М.В. КУРЛЕНЯ**

**В.И. ОСИПОВ**

**Э.М. СОКОЛОВ**

**К.Н. ТРУБЕЦКОЙ**

**В.В. ХРОНИН**

**В.А. ЧАНТУРИЯ**

**Е.И. ШЕМЯКИН**

*ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
ГОРНОГО УНИВЕРСИТЕТА*

*ректор МГГУ,  
чл.-корр. РАН*

*директор  
Издательства МГГУ*

*академик РАЕН*

*академик РАЕН*

*академик РАЕН*

*академик РАЕН*

*академик РАН*

*академик РАН*

*академик МАН ВШ*

*академик РАН*

*профессор*

*академик РАН*

*академик РАН*

**ВЫСШЕЕ ГОРНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ**

**Л.Д. Певзнер**

# **ТЕОРИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

*Допущено Учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по горному образованию в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности «Управление и информатика в технических системах»*

**МОСКВА**



**ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
ГОРНОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**2 0 0 2**

УДК 622.658.012.011.56  
ББК 32.98  
П 23

**Рецензенты:**

- Проф. Г.Н. Лебедев (Московский государственный авиационный институт (Технический университет))
- Проф. А.Д. Яризов (Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина)

**Федеральная программа  
книгоиздания России**

Певзнер Л.Д.

П 23 Теория систем управления. — М.: Издательство Московского государственного горного университета, 2002. — 472 с.

ISBN 5-7418-0076-9 (в пер.)

Представлен обобщенный, годовой курс лекций по теории автоматического управления. Содержит основные разделы современной теории управления динамическими системами. Приведены упражнения для практических занятий. В приложениях даны справочные сведения математического аппарата теории.

Для студентов специальностей "Управление и информатика в технических системах" и "Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов". Может быть использовано при изучении дисциплины студентами и аспирантами смежных специальностей.

УДК 622.658.012.011.56  
ББК 32.98

ISBN 5-7418-0076-9

© Л.Д. Певзнер, 2002  
© Издательство Московского государственного горного университета, 2002

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	9	1.3. Основные задачи теории управления.....	19
1. Основные понятия теории управления.....	11	1.4. Принципы автоматического управления.....	20
1.1. Ключевые понятия теории управления.....	11	1.5. Классификация автоматических систем управления.....	22
1.2. Примеры автоматических систем управления.....	13	1.6. Исторический очерк создания теории управления.....	22

### Часть первая АНАЛИЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

2. Математические модели линейных непрерывных систем.....	29	3.5. Модуляционная внешняя модель дискретной системы.....	82
2.1. Примеры непрерывных систем управления.....	29	3.6. Упражнения.....	89
2.2. Модели состояния системы.....	30	4. Математические модели нелинейных систем.....	93
2.3. Линеаризация моделей системы.....	42	4.1. Примеры нелинейных систем управления.....	93
2.4. Модели типа "вход—выход".....	45	4.2. Математические модели нелинейных систем.....	94
2.5. Графовые модели системы.....	47	4.3. Топологические методы анализа нелинейных систем.....	102
2.6. Взаимосвязь моделей системы.....	53	4.4. Линейные представления нелинейной модели системы.....	112
2.7. Упражнения.....	64	4.5. Упражнения.....	119
3. Математические модели линейных дискретных систем.....	69	5. Свойства и характеристики линейных непрерывных систем управления.....	123
3.1. Примеры цифровых систем управления.....	69	5.1. Управляемость и наблюдаемость.....	123
3.2. Модели состояния линейной дискретной системы.....	70		
3.3. Передаточные функции линейной дискретной системы.....	76		
3.4. Взаимосвязь моделей.....	80		

5.2. Устойчивость линейных систем	126
5.3. Чувствительность и робастность систем управления	129
5.4. Динамические характеристики линейных систем	134
5.5. Динамические характеристики типовых звеньев линейных систем управления	141
5.6. Упражнения	152
<b>6. Исследование устойчивости линейных непрерывных систем управления</b>	<b>155</b>
6.1. Метод Ляпунова для оценки устойчивости	155
6.2. Алгебраические критерии устойчивости	157
6.3. Частотные критерии устойчивости	160
6.4. Анализ параметрической устойчивости	164
6.5. Упражнения	176
<b>7. Анализ качества процессов управления в линейных непрерывных системах</b>	<b>179</b>
7.1. Динамические процессы и ошибки в системах управления	179
7.2. Оценка качества переходных процессов	185
7.3. Стохастические методы анализа качества	193

## **Часть вторая СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

<b>10. Синтез линейных непрерывных систем в частотной области</b>	<b>261</b>
10.1. Методы последовательной и параллельной коррекции	261
10.2. Типовые регуляторы	268
10.3. Синтез последовательно-подчиненных регуляторов	274

7.4. Машинные методы анализа качества процессов управления	199
7.5. Упражнения	202

### **8. Исследование устойчивости и качества процессов управления в дискретных линейных системах**

8.1. Управляемость и наблюдаемость	205
8.2. Устойчивость линейных дискретных систем	210
8.3. Характеристики дискретных автоматических систем	216
8.4. Анализ качества процессов управления	220
8.5. Упражнения	222

### **9. Исследование устойчивости и качества процессов управления в нелинейных системах**

9.1. Анализ устойчивости в малом	226
9.2. Устойчивость в большом и в целом	229
9.3. Абсолютная устойчивость нелинейных систем управления	233
9.4. Периодические процессы в нелинейных системах	244
9.5. Анализ качества процессов управления	252
9.6. Упражнения	256

10.4. Упражнения	283
------------------	-----

### **11. Синтез линейных непрерывных систем во временной области**

11.1. Методы аналитического конструирования регуляторов	287
---	-----

11.2. Синтез линейного оптимального регулятора	293
11.3. Наблюдатели состояния линейной системы	298
11.4. Синтез замкнутой системы с наблюдателем состояния	306
11.5. Упражнения	309

### **12. Синтез цифровых систем управления**

12.1. Синтез системы с последовательно включенным регулятором	313
12.2. Синтез системы с заданным расположением полюсов	320
12.3. Цифровые наблюдатели состояния системы	326

12.4. Упражнения	330
------------------	-----

### **13. Синтез линейных стохастических систем управления**

13.1. Задачи синтеза систем управления при случайных воздействиях	335
13.2. Синтез управления с минимальной дисперсией ошибки	338
13.3. Оптимальная стохастическая фильтрация	347
13.4. Фильтры Калмана	351
13.5. Параметрическая идентификация	357
13.6. Упражнения	363

## **Часть третья ОПТИМАЛЬНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ**

<b>14. Системы управления, оптимальные по заданному критерию</b>	<b>369</b>
14.1. Вариационные методы оптимального управления	371
14.2. Процедура принципа максимума Понтрягина	376
14.3. Метод динамического программирования Беллмана	382
14.4. Системы, оптимальные по квадратичному критерию	392
14.5. Системы, оптимальные по быстродействию	396
14.6. Субоптимальные системы и системы с переменной структурой	402
14.7. Упражнения	406

### **15. Системы управления с адаптацией**

15.1. Задачи управления с адаптацией	409
15.2. Экстремальные системы и регуляторы	411

15.3. Идентификация объекта управления в замкнутом контуре	421
15.4. Адаптивные системы с эталонной моделью	426

### **ПРИЛОЖЕНИЕ**

#### **16. Математический аппарат теории управления**

16.1. Матрицы	433
16.2. Функциональные преобразования	442
16.3. Методы оптимизации	445
16.4. Случайные процессы	455
16.5. Программные средства для анализа и синтеза систем управления	461

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

#### **ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ**

# ВВЕДЕНИЕ

---

---

**А**втоматизация предназначена для частичного или полного исключения человека из непосредственного участия в производственном процессе. Автоматизация производства направлена на то, чтобы процессы получения, преобразования, передачи и использования энергии, материалов и информации выполнялись автоматически.

Необходимость автоматизации обусловлена факторами прогресса: ростом производительности и эффективности труда, увеличением мощности и быстродействия машин, повышением точности и качества, сложности и опасности технологических процессов, ростом ответственности за безопасность человека и его среды обитания.

Автоматические (от греч. *automatos* — самодействующие) системы управления — средства автоматизации. Теория управления — наука, разрабатывающая и изучающая методы и средства создания систем управления.

Особенностью современного этапа научно-технического прогресса является то, что объектами автоматизации оказываются не только процессы материального производства, но и сферы умственной и творческой деятельности человека: организационно-административного управления, распределения ресурсов и принятия решений, проектирования и конструирования, информационного обслуживания, здравоохранения, научных исследований и образования.

*Теория управления* и ее основная часть — *теория автоматического управления* является фундаментальной дисциплиной учебного плана многих инженерных специальностей.

Эта книга написана на основе двадцатипятилетнего опыта преподавания дисциплины “Теория автоматического управления” и предназначена в первую очередь для студентов специальности “Управление и информатика в технических системах”, однако может быть использована при изучении дисциплины студентами и аспи-

рантами смежных специальностей.

Книга отвечает современной программе дисциплины и соответствует годовому курсу лекций и практических занятий. Материал книги структурирован так, что каждая ее глава делится на разделы, которые помимо теории содержат примеры, каждую главу заключают упражнения, которые можно решать аналитически или с использованием моделирующих программных средств.

Язык современной теории управления есть язык ма-

тематического анализа, матричной алгебры, дифференциальных уравнений, теории функций и случайных процессов, поэтому включает книгу приложение, которое содержит необходимые понятия и методы этих теорий.

При написании книги автор постоянно решал проблему, как в малом объёме не объятное, как просто изложить сложное, как максимально раскрыть удивительную красоту современной теории управления.

# 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

---

---

*Ключевые понятия теории управления — Примеры автоматических систем управления — Основные задачи теории управления — Принципы автоматического управления — Классификация автоматических систем управления — Исторический очерк создания теории управления.*

## 1.1. КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

*Теория управления — наука о принципах и методах построения автоматических и автоматизированных систем управления и закономерностях протекающих в них процессов.*

Введем ключевые понятия теории управления\* и затем поясним их:

- 1) **управляемый объект** или **управляемый процесс** (controlled object or process);
- 2) **управляющее воздействие** (controlling action);
- 3) **возмущение** (disturbance);
- 4) **управляемая координата** (controlled coordinate);
- 5) **координаты состояния** (coordinates state);
- 6) **цель управления** (control aim);

---

\* Терминология основных понятий теории управления впервые упорядочена в 1954 г. Академией наук СССР и представлена первому Международному конгрессу IFAC в 1960 г. Терминология современной теории управления регламентирована специальным Сборником рекомендуемых терминов, вып. 107 (М.: Наука, 1988).

- 7) *управляющее устройство*, или *регулятор* (controlling object or controller);
- 8) *задающее воздействие* (setting action);
- 9) *обратная связь* (feedback);
- 10) *закон*, или, *алгоритм управления* (control law or control algorithm);
- 11) *система управления* (control system);
- 12) *структура системы управления* (control system structure);
- 13) *качество управления* (control performance).

Управляемый объект или управляемый процесс (1) есть динамическая система произвольной природы, изменяющая свои координаты состояния (5) и, как следствие, — выходные управляемые координаты (4) под влиянием внешних воздействий: управляющих (2) и возмущающих (3). Для достижения объектом цели управления (6) организуется специальное внешнее воздействие, которое формируется управляющим устройством (7) на основе сигналов задающего воздействия (8) и воздействия обратной связи (9) по известному алгоритму, или закону управления (10). Совокупность указанных элементов, связей и отношений между элементами системы управления (11) образует структуру системы управления (12). Полезность системы управления оценивается показателями качества управления (13).

Теория управления, используя *математические модели*, позволяет изучать *динамические процессы* в автоматических системах, устанавливать структуру и определять параметры составных частей системы для придания реальному процессу управления желаемых свойств и заданного качества.

Теория управления является фундаментом для специальных дисциплин, решающих проблемы *автоматизации управления и контроля* технологических процессов и подвижных технологических объектов, проектирования *слеящих систем и регуляторов, автоматического мониторинга* производства и окружающей среды, создания *автоматов и робототехнических систем*.

## 1.2. ПРИМЕРЫ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Все многообразие систем регулирования и систем управления невозможно себе представить, поэтому приведем лишь некоторые примеры автоматических систем, важные с точки зрения будущей классификации этого многообразия и ставшие уже классическими. В последующих главах число примеров будет множиться.

### 1. Система регулирования частоты вращения двигателя (рис. 1).

Цель регулирования — стабилизация частоты вращения рабочей машины 1 независимо от нагрузки. При изменении нагрузки на рабочей машине частота вращения двигателя 2 изменяется. Величина, пропорциональная отклонению истинной частоты вращения  $\omega(t)$  от заданной  $\omega^*$ , измеряется с помощью тахогенератора 3 и потенциометра 4. Сигнал  $\omega^* - \omega(t) = \epsilon(t)$  разности, усиленный по амплитуде и по мощности, подается в обмотку возбуждения генератора 5, который питает по якорной цепи двигатель независимого возбуждения так, что величина отклонения частоты вращения уменьшается. Потенциометр, усилитель 6 и генератор в данном случае выполняют функцию регулятора. Задание  $\omega^*$  устанавливается с помощью независимого источника питания и может быть изменено потенциометром.

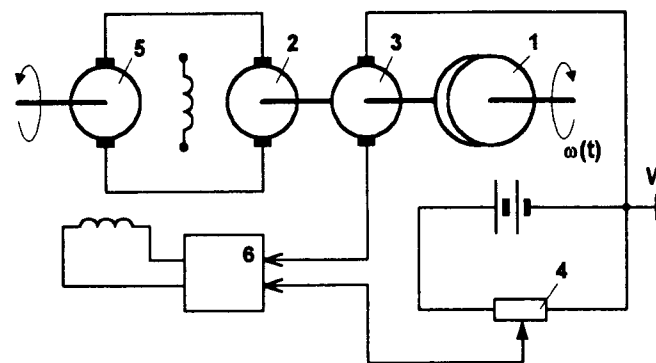


РИС. 1

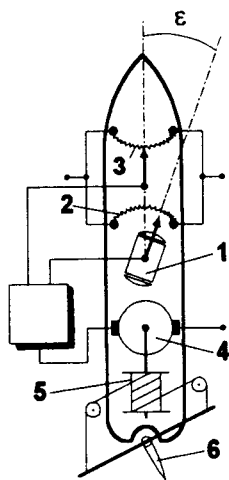


РИС. 2

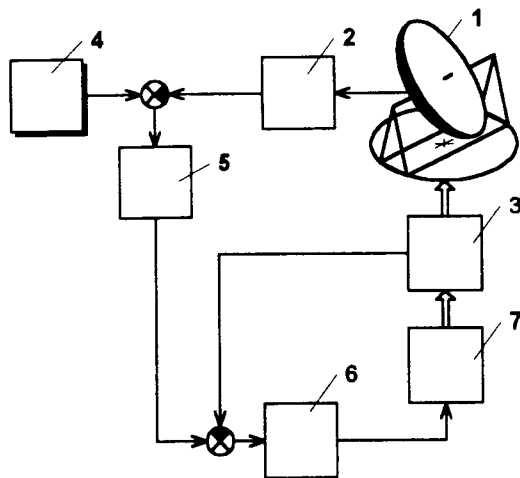


РИС. 3

### 2. Система автоматической стабилизации курса (рис. 2).

Гироскоп 1 раскручивается так, чтобы его ось вращения была направлена по заданному курсу, потенциометры задания 2 и истинного направления 3 включены в мостовую схему. Сигнал, пропорциональный отклонению от курса  $\varepsilon(t)$ , снимается с диагонали моста, усиливается и подается на двигатель 4 рулевой машины 5. Уход с курса устраняется поворотом руля 6 рулевой машиной.

### 3. Система углового сопровождения радиотелескопа (рис. 3).

Параболическое зеркало 1 антенны фокусирует электромагнитное излучение внешнего пространства в центральной точке телескопа, откуда сигнал излучения передается по волноводу к приемнику. Платформа телескопа, закрепленная в карданном подвесе, обеспечивает движение параболоида антенны в координатах "угол места—азимут". Угол азимута измеряется цифровым оптическим датчиком 2 непосредственно на оси платформы относительно специального источника света. Для поворота платформы используется маломощный высокомоментный гидропри-

формы используется маломощный высокомоментный гидропривод 3. Задание слежения составляет азимутальный угол наблюдения, астрономические координаты которого пересчитываются в земные специальным вычислительным устройством 4. Цифровой сигнал углового рассогласования преобразуется в аналоговый устройством 5, непрерывный сигнал рассогласования вместе с сигналом коррекции, которым учитываются скорость и ускорение разворота платформы, подается через усилитель 6 на электро-механический преобразователь 7 гидропривода. Основными возмущениями в системе являются упругие деформации опор, вызываемые порывами ветра, неуравновешенностью конструкции при смене угла места и температурными изменениями.

### 4. Система регулирования толщины ленты стального проката (рис. 4).

Измерение толщины стальной полосы выполняется в системе рентгеновским толщиномером 1, непрерывный сигнал, пропорциональный толщине, преобразуется аналого-цифровым преобразователем и подается в микроконтроллер 2. Контроллер выполняет функции регулятора, в нем происходит сравнение текущей толщины с технологическим заданием, определяются на текущий момент  $t$  законы  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  обжима двумя ближайшими клетями 3 полосы стального проката и необходимое при этом натяжение  $g(t)$  ленты. Вычисленные цифровые сигналы преобразуются в непрерывные цифроаналоговым преобразователем, подаются на исполнительные механизмы сжатия 4 и натяжения 5.

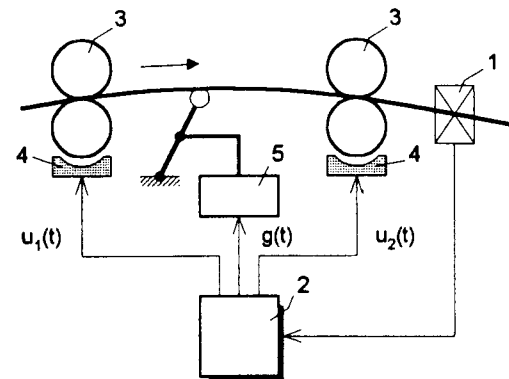


РИС. 4



### 5. Система автоматического слежения за целью

(рис. 5).

Система предназначена определять расстояние от радиолокационной станции до подвижной цели, например самолета. Искомое расстояние  $\rho(t)$  пропорционально времени прохождения импульсов от передатчика к цели и обратно к приемнику, поэтому истинное расстояние пропорционально временному положению  $T$  принимаемой пачки импульсов по отношению к моменту их посылки. Оценка расстояния  $\rho^*(t)$ , определяемого системой, характеризуется временным положением  $T^*$  селекторных импульсов дальности, которые формируются модулятором 1. Если добиться того, что временное положение селекторных импульсов  $T^*$  совпадет с временным положением  $T$  принимаемых сигналов, то задача автоматического слежения по дистанции будет решена.

Для сравнения этих временных положений отраженные и селекторные сигналы подаются в дискриминатор 2, который формирует сигнал ошибки в виде коротких серий импульсов. Фильтр 3 усредняет пачки импульсов сигнала ошибки, превращая их в один импульс, пропорциональный разности  $\varepsilon(t) = \rho(t) - \rho^*(t)$  истинного расстояния и оценки этого расстояния, а затем устройство 4 формирует сигнал оценки расстояния, из которого модулятор генерирует селекторные импульсы.

### 6. Система управления процессом нанесения полимерного покрытия на рулонную основу (рис. 6).

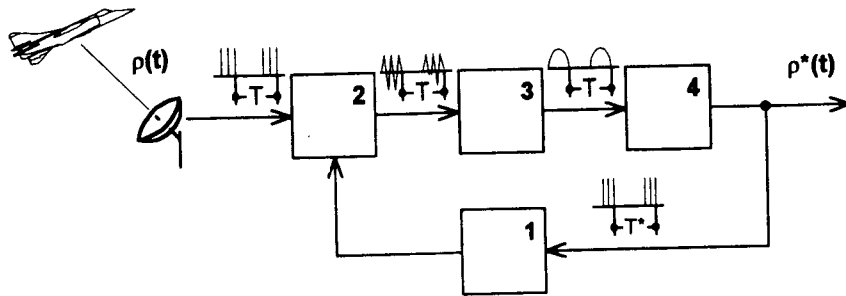


РИС. 5

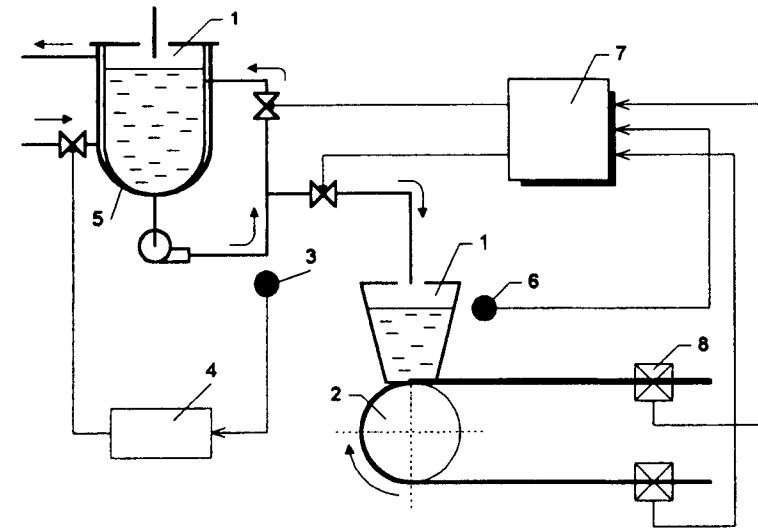


РИС. 6

Целью управления является стабилизация средней толщины покрытия на заданном значении при минимальной среднеквадратичной неравномерности покрытия. Полимерный раствор из емкости 1 попадает на основу, которая подается опорным барабаном 2 с некоторой скоростью. Текущая толщина покрытия  $y(t)$  зависит от величины зазора  $x_1(t)$  между емкостью и основой, от уровня раствора полимера в емкости  $x_2(t)$ , динамической вязкости раствора  $x_3(t)$  и скорости  $x_4(t)$  движения основы. Для достижения цели в системе необходимо поддерживать постоянными величины  $x_1(t)$ , ...,  $x_4(t)$ . Основным возмущением является случайная неравномерность толщины основы. Стабилизация переменных  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ ,  $x_4(t)$  осуществляется независимыми локальными системами регулирования. Например, вязкость полимера стабилизируется регулированием температуры раствора. Контур управления содержит датчик температуры 3, регулятор 4 и клапан, управляющий подачей горячей воды в термостатическую оболочку емкости 5. Уровень раствора измеряется датчиком 6 и регулируется контроллером 7 путем перекрытия клапанов подачи раствора.

Цель управления — поддержание постоянной величины средней толщины покрытия и ее среднеквадратичного отклоне-

ния. Фактическое значение средней толщины и среднего квадрата отклонения подсчитывается дискретно через определенные промежутки времени по данным измерений текущих значений толщины покрытия и основы, которые осуществляются датчиками 8. Если управляемые величины не отвечают требованиям, то контроллер, используя математическую модель гидродинамического истечения жидкости, выполняет адаптивный процесс поиска новой рабочей точки — новых значений вязкости, уровня и скорости движения основы. Найденные оптимальные значения этих переменных будут являться заданием на последующий интервал времени.

### 7. Система управления движением манипуляционным роботом (рис. 7).

Система предназначена для динамического управления отдельными сочленениями робота с целью перемещения схвата манипулятора по планируемой траектории. Динамические переменные движения: угловые перемещения, скорости и ускорения, силы и моменты, отвечающие планируемой траектории, вычисляются заранее, до начала движения и хранятся в памяти микроЭВМ робота. Эти переменные как функции времени определяют геометрию, кинематику и динамику планируемой траектории, которая является текущим заданием для системы управления. Задача системы управления состоит в том, чтобы отследить эту траекторию, сделав отклонения от нее минимальными. Следящая система управления схватом робота манипулятора, представленная на рис. 7, содержит микроЭВМ 1, цифроаналоговый преобразователь 2, усилитель 3, датчики положения 4, скорости 5 и тактильные датчики 6 внешней информации, интерфейс датчиков 7.

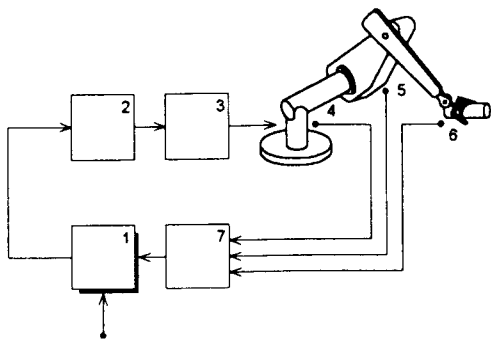


РИС. 7

## 1.3. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотренные примеры лишь немного проиллюстрировали разнообразие множества систем управления, тем не менее эти примеры позволяют провести некоторое обобщение. Все системы решают как минимум одну из трех задач: либо это задача поддержания некоторых управляемых переменных системы на заданном уровне, либо это задача программного изменения управляемых переменных системы, либо это задача слежения за произвольно изменяемым во времени входным задающим воздействием. Системы, решающие задачи первого типа, называются *системами стабилизации*, системы второго типа — *системами программного управления*, системы третьего типа — *слеящие системы*.

Задающее воздействие в системах стабилизации неизменно, в системах программного управления — известная функция времени, в следящих системах — произвольная функция времени.

Примерами систем стабилизации являются системы регулирования частоты вращения двигателя и автоматической стабилизации курса, регулирования толщины ленты стального проката и управления процессом нанесения полимерного покрытия на рулонную основу.

Примером системы программного управления является система управления движением манипуляционным роботом, если рассматривать робота как систему, предназначенную для выполнения программно известных движений. Другим примером системы программного управления является система разогрева стального слитка в методической печи, где температура разогрева должна изменяться по заранее известной технологически заданной программе.

Примерами следящих систем являются система углового сопровождения радиотелескопа, система автоматического слежения за целью, система управления движением манипуляционным роботом.

Основными задачами теории управления являются *задачи анализа* динамических свойств автоматических систем на модельном или физическом уровне; *задачи синтеза* — определение алгоритма управления, выбор реализующей этот алгоритм функциональной структуры автоматической системы, ее параметров и характеристик, удовлетворяющих требованиям качества

и точности; задачи автоматизированного проектирования систем управления, создание и испытание реальных автоматических систем.

## 1.4. ПРИНЦИПЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Основное предназначение системы автоматического управления — устранение до необходимых пределов отклонения управляемой переменной от входного задающего воздействия, независимо от внешних возмущений.

Способ управления определяется принципом образования управляющего воздействия. По способам управления автоматические системы разделяются на *разомкнутые* и *замкнутые*. В разомкнутых автоматических системах управляющее

воздействие  $u(t)$  формируется управляющим устройством как функция задающего или возмущающего воздействия. Например, если известна модель объекта  $y = Y(u, p)$  в алгебраической или дифференциальной форме и известно необходимое движение  $y(t)$ , то в некоторых случаях возможно решить обратную задачу  $u(t) = G(y(t), p(t))$  и тем самым определить то управление, которое необходимо для реализации движения объекта 1 (рис. 8, а). Найденный закон управления  $u(t)$  реализуется регулятором 2. Некоторые системы программного управления построены по этому способу.

Отметим, однако, что управление  $u(t) = G(y(t), p(t))$  можно реализовать в том случае, если  $p(t) = \text{const}$  или возмущение  $p(t)$  можно измерить. На рис. 8, б представлена структура, реализующая *принцип управления по возмущению*.

Эта структура является разомкнутой. Основные недостатки систем с разомкнутой структурой: невозможно аналитически учесть все действующие возмущения и поэтому невозможно иметь идеально точную модель системы  $y = Y(u, p)$ , невозможно измерить все регулярные и нерегулярные возмущения. Разомкнутые системы не могут управлять неустойчивыми объектами и объектами с изменяющимися параметрами.

Структура замкнутых систем управления представлена на рис. 8, в. Управляющее воздействие  $u(t)$  формируется как функция *рассогласования*  $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$  текущего значения управляемой переменной от требуемого задающего воздействия, что позволяет использовать рассогласование — следствие управления — в причину для устранения этого рассогласования. Эта фундаментальная идея лежит в основе принципа *управления по отклонению*, который реализуется замкнутыми системами.

Принцип управления по отклонению универсален, потому что позволяет достигать цели управления независимо от причин, вызвавших рассогласование, — изменение внутренних свойств объекта и внешних воздействий. Неустойчивые объекты могут быть управляемы только системами с замкнутыми структурами. Замкнутые системы позволяют решать все задачи управления: стабилизации, слежения и программного управления.

Обобщением двух рассмотренных принципов управления является принцип *комбинированного управления* (рис. 8, г), который позволяет в замкнутой системе получить преимущества принципа управления по возмущению.

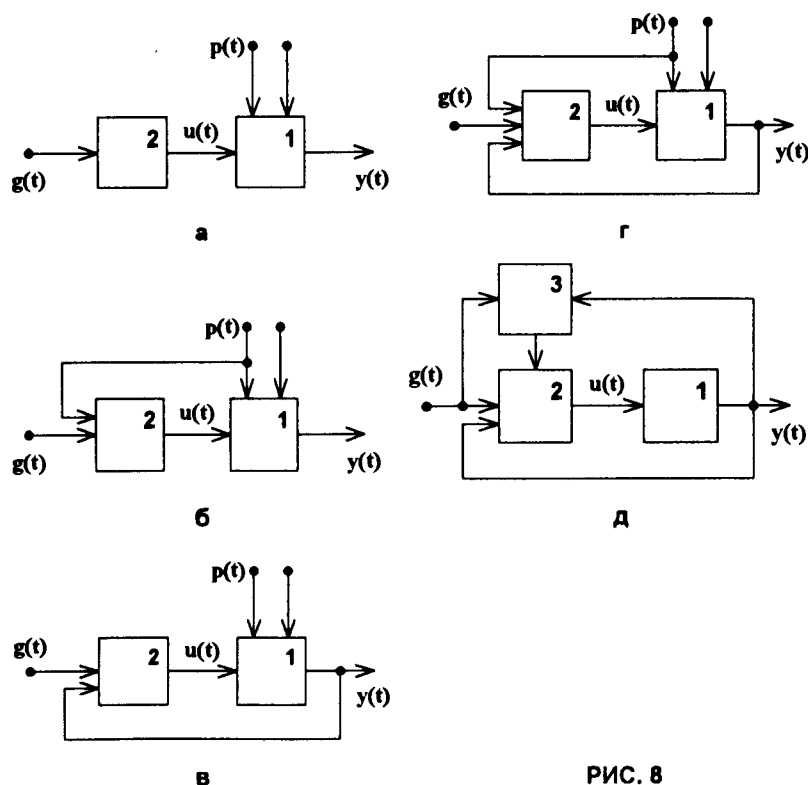


РИС. 8

Системы, способные изменять закон управления с целью осуществления наилучшего в некотором смысле качества управления независимо от внешних воздействий (рис. 8, д), используют *принцип адаптации*. Показатель качества, имеющий экстремальную форму, используется устройством адаптации  $Z$  для изменения структуры управляющего устройства или его параметров.

## 1.5. КЛАССИФИКАЦИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Все многообразие автоматических систем можно разделить на классы по различным признакам, важнейшими из которых являются *цель управления, вид структуры, вид и размерность математической модели, характер сигналов, характер параметров, характер внешних воздействий*. Согласно этим классификационным признакам будем различать:

- системы стабилизации, программного управления, следящие системы;
- системы разомкнутые, замкнутые или комбинированной структуры;
- модели линейные, нелинейные, скалярные и векторные;
- системы непрерывные, дискретные или гармонически модулированные;
- системы стационарные и нестационарные, с сосредоточенными или распределенными параметрами;
- системы с детерминированными или стохастическими воздействиями.

## 1.6. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК СОЗДАНИЯ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Теория управления обобщает многовековой опыт создания автоматов, регуляторов и систем автоматического управления в самых разнообразных сферах человеческой жизни и деятельности.

В древнем Вавилоне в своде законов царя Хаммурапи описывался закон управления водоподачей для регулирования влажности почвы путем перекрытия каналов; Герон Александрийский на рубеже новой эры описывал свои автоматы и автоматы древних для открывания дверей храма при зажигании жертвенного огня, продажи священной воды, движения кукол-марионеток; в средние века создавались автоматы, подражающие движениям человека (железный человек Больштадта, пражский глиняный колосс Голем). XVIII век породил большое число антропоморфных автоматов: писец, художник и музыкант швейцарских часовщиков Пьера и Анри Дро, кукольный театр Ивана Кулибина.

Первыми промышленными автоматическими устройствами являлись так называемый зюйд-вестовый привод Андре Майкла (1750) для автоматического разворота по ветру башни ветряной мельницы, регулятор питания котла паровой машины Ивана Ползунова (1765), центробежный регулятор скорости паровой машины Джеймса Уатта (1784) и система программного управления ткацким станком Жозеф-Мари Жакара (1804).

В XVIII и XIX веках реализованы основные принципы управления: Иван Ползунов и Джеймс Уатт использовали генеральный принцип управления с обратной связью — управление по отклонению; Жан Понселе (1850) применил принцип управления по возмущению — управление по нагрузке, что породило и привело к теории инвариантности систем управления; братья Вернер и Вильгельм Сименсы (1845) применили регулятор с дополнительным воздействием по производной от регулируемой величины. Жозеф Фарко впервые осуществил (1873) непрямое регулирование, используя для усиления мощности управляющего сигнала сервопривод, А.П. Давыдов создал (1880) первую следящую систему с электрическим приводом для корабельной пушечной установки, К.Э. Циолковский предложил (1898) автоматический регулятор горизонтального руля для стабилизации полета дирижабля.

Первые работы по теории управления опубликовали Джеймс Максвелл "О регуляторах" (1868) и Иван Алексеевич Вышнеградский "О регуляторах прямого действия" (1876). В этих работах регулятор и объект управления впервые рассмотрены в единстве как система регулирования, что позволило поставить проблему анализа динамических свойств системы регулирования в целом. И.А. Вышнеградский, исследуя систему "силовая машина — регулятор", получает для этой системы уравнения малых

колебаний, характеристическое уравнение третьего порядка, находит инженерные условия устойчивого регулирования. Задача синтеза регулятора прямого действия, обеспечивающего наибольшую точность, впервые поставлена Пафнутием Львовичем Чебышевым в работе "О центробежном уравнителе" (1871).

В эти же годы теория управления обогатилась постановкой и решением проблемы устойчивости системы регулирования. Английский физик Дж. Максвелл на основании своего опыта управления движением телескопа решил частную задачу устойчивости системы третьего порядка "паровая машина-регулятор", а затем поставил на заседании Лондонского математического общества в 1868 году общую задачу определения устойчивости линейной системы регулирования произвольного порядка по виду ее характеристического уравнения. Эдуард Раус нашел (1874) решение этой задачи в форме критерия устойчивости. Профессор Высшей технической школы в Цюрихе Аурель Стодола — создатель совершенных по тому времени паровых и газовых турбин независимо от Дж. Максвелла, используя идею линеаризации уравнений движения, пришел к выводу (1892), что задача устойчивости сводится к проблеме исследования расположения корней характеристического уравнения системы. Задачу Стодола решил в алгебраической форме, создав критерий устойчивости, его коллега по университету профессор Адольф Гурвиц (1895).

Общая проблема устойчивости движений нелинейной динамической системы поставлена и разрешена (1892) Александром Михайловичем Ляпуновым. Результаты А.М. Ляпунова явились основой для создания различных методов анализа и синтеза систем управления движением.

В начале XX века появились многочисленные работы по теории регуляторов и регулирования, обобщавших опыт создания и эксплуатации сервомеханизмов для автоматического управления паровыми и электрическими машинами, кораблями и летательными аппаратами. Классическими стали работы: М. Толле "Регулирование силовых машин" (1905), Н.Е. Жуковский "Теория регулирования хода машин" (1909), М. Жюльяр "Автоматические регуляторы электрических машин" (1912), Н. Минорский "Устойчивость на курсе автоматически управляемых тел" (1922), И.Н. Вознесенский "Быстродействующие сервомоторы" (1922), Г. Хазен "Теория сервомеханизмов" (1934).

В 30-х годах проблемы развития электротехники и радиотехники привели к созданию специального инженерного языка — частотных характеристик, который был использован для анализа

и синтеза систем регулирования: Г. Найквист предложил (1932) критерий устойчивости замкнутых систем по частотным характеристикам разомкнутой системы, А.В. Михайлов (1938) сформулировал частотный критерий устойчивости систем без размыкания, Г. Боде ввел (1943) логарифмические частотные характеристики для анализа цепей и усилителей с обратными связями, В.В. Солодовников разработал (1939) основы инженерной методологии частотного проектирования линейных систем регулирования.

Прямые, нечастотные методы анализа и синтеза линейных систем создавались трудами Ю.И. Неймарка, В.С. Кулебакина, С.П. Стрелкова, Я.З. Цыпкина, Б.Н. Петрова, А.А. Красовского, А.А. Фельдбаума. Завершают построение общего здания теории линейных систем управления работы А.М. Лётова, Р. Калмана и Л. Заде, выполненные в 60-е годы XX века.

Развитие теории стохастических систем управления берет свое начало с классических работ А.Н. Колмогорова (1941), А.Я. Хинчина (1938), Н. Винера (1949) и развито в трудах В.В. Солодовникова (1950), В.С. Пугачева (1950), П.И. Кузнецова (1954), Р. Калмана (1960), К. Острёма (1962).

Нелинейная теория управления развивалась на основе методов механики и теории колебаний, теории дифференциальных уравнений. А.М. Ляпунов (1892) предложил методы анализа устойчивости движения нелинейных систем в малом и большом; методы фазового пространства, малого параметра и метод гармонического баланса создавали А. Пуанкаре (1905), А.А. Андронов (1928), Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов (1932), Б.В. Булгаков (1942), Л.С. Гольдфарб (1947), Дж. Массера (1948), А.И. Лурье (1951). Частотные методы анализа устойчивости нелинейных систем созданы В.-М. Поповым (1959).

В 1948 году Я.З. Цыпкин и Э. Джури, используя дискретную форму преобразования Лапласа, закладывают основы, а затем развивают общую теорию дискретных автоматических систем.

Создание теории инвариантных систем управления, обладающих свойствами независимости динамических характеристик от внешних возмущений, берет свое начало от работ Г.В. Щипанова (1938), Н.Н. Лузина (1940). Принципы физической реализуемости инвариантных систем разработаны В.С. Кулебакиным (1948) и Б.Н. Петровым (1956).

Общая теория оптимальных систем управления создавалась в 60-х годах XX века трудами Л.С. Понтрягина, Б.В. Болтян-

ского, Н.Н. Красовского, А.А. Фельдбаума, Р. Беллмана, Р. Калмана. Теория экстремальных и адаптивных систем управления основывается на работах В.В. Казакевича, А.А. Красовского, Я.З. Цыпкина.

Современный этап развития теории управления характеризуется высоким уровнем использования методов алгебры, функционального анализа, теории случайных процессов и вычислительных средств для решения сложных задач анализа и синтеза систем управления в условиях неполной определенности, создания оптимальных систем управления, работающих в стохастической среде.

Создана Международная федерация по автоматическому управлению IFAC. Ее первый конгресс был проведен в 1960 году в Москве. Ежегодно проводятся десятки отечественных и международных конференций и симпозиумов, которые обобщают и координируют работы в области теории и практики управления. Теория управления является фундаментальной дисциплиной инженерного образования, ее преподают во всех технических вузах России.

**Часть первая**

# **АНАЛИЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

- 
- 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ
- 
- 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ
- 
- 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
- 
- 5. СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
- 
- 6. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ  
ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
- 
- 7. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ  
УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ  
НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ
- 
- 8. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ  
И КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ  
В ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ
- 
- 9. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ  
И КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ  
В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

## 2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

---

*Примеры непрерывных систем управления — Модели состояния системы — Линеаризация моделей системы — Модели типа "вход-выход" — Графовые модели системы — Взаимосвязь моделей системы — Упражнения.*

### 2.1. ПРИМЕРЫ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Непрерывные системы отличаются от дискретных тем, что сигналы в любой точке структуры системы являются непрерывными. Простейшим примером непрерывной системы управления может служить система регулирования уровня жидкости, схема которой приведена на рис. 9. В емкости с жидкостью имеется поплавок 1, который непрерывно отслеживает уровень, перемещая контакт потенциометра 2. Предполагаем, что характеристики контактной поверхности потенциометра линейные и непрерывные, тогда напряжение питания двигателя 3, пропорциональное отклонению уровня от заданного, также оказывается непрерывным. Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением непрерывно поворачивает вентиль 4 питающей трубы на угол, пропорциональный сигналу ошибки, и поток жидкости пополняет емкость. Для выбранной степени детализации оказывается, что все сигналы схемы непрерывны, модели всех элементов этой системы — линейны.

Приведенный пример иллюстрирует субъективный подход к выбору модели описания системы. В самом деле, при другом взгляде на систему оказывается, что характеристика потенциометра нелинейна и разрывна, исполнительный механизм содержит не только двигатель, но и редуктор, характеристика которого также нелинейна, поскольку зубчатая передача имеет люфты. Все это верно, но верно и другое. Неоднозначность выбора мо-

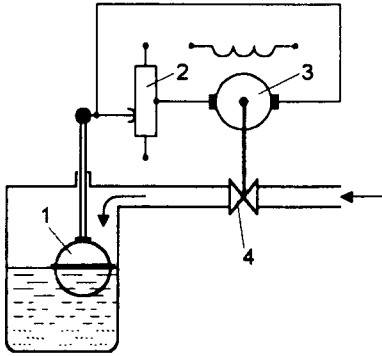


РИС. 9

дели системы — это инструмент последовательного познания реальности. На данном этапе мы изучаем линейные модели, в которых все переменные непрерывны как самые простые модели автоматических систем.

Другими примерами непрерывных линейных систем управления являются система регулирования частоты вращения двигателя и система автоматической стабилизации курса, приведенные в первой главе.

## 2.2. МОДЕЛИ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ

Рассмотрим класс систем (рис. 10), движение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t), t); x(0), \quad (2.1)$$

где  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$  — действительный  $n$ -мерный вектор, отражающий текущее состояние системы, который будем называть **вектором фазовых координат**, или **вектором состояния системы**;

$x(0)$  — **начальное состояние системы**;

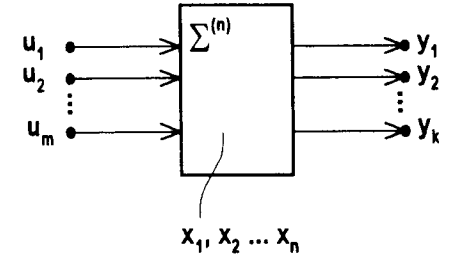
$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))^T$  — действительный  $m$ -мерный вектор управления, который будем называть **вектором входа системы**;

$F$  — действительная векторная функция векторных аргументов;

$t$  — текущее непрерывное время.

Выходные координаты системы образуют  $k$ -мерный вектор управляемых координат системы,  $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t))^T$ , который будем называть **вектором выхода системы**. Вектор

РИС. 10



выхода полностью определяется вектором состояния и быть может управлением и временем:

$$y(t) = G(x(t)). \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1), (2.2) образуют **математическую модель** системы. В настоящем разделе будем рассматривать в основном **линейные математические модели**, для которых уравнения (2.1), (2.2) принимают вид

$$\dot{x}'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t); x(0);$$

$$y(t) = C(t)x(t). \quad (2.3)$$

Матрицы  $A_{n \times n}$ ,  $B_{n \times m}$ ,  $C_{k \times n}$  могут быть переменными или постоянными, в последнем случае модель системы называют **стационарной**, или **моделью с постоянными параметрами**.

Говорят, что линейная система полностью задана, если заданы ее матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и начальное состояние  $x(0)$ . При этом будем записывать:  $\Sigma^{(n)}$ :  $A, B, C, x(0)$ .

Замена координат состояния системы, выполненная путем невырожденного преобразования  $z = Px$ , порождает **эквивалентную модель** системы:

$$\Sigma^{(n)}: PAP^{-1}, PB, CP^{-1}, Px(0). \quad (2.4)$$

### Примеры

1. Рассмотрим электрическую RLC-цепь, представленную на рис. 11, в которой в качестве координат состояния выберем  $x_1 = i_1$ ,  $x_2 = i_2$  — токи в соответствующих ветвях цепи и  $x_3 = q$  — заряд емкости. Система имеет один вход — напряжение питания и два выхода.



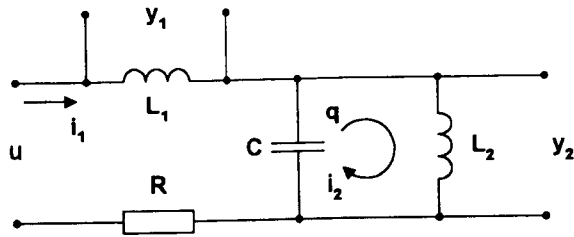


РИС. 11

Переходные процессы в этой цепи описываются уравнениями

$$i_1 R + L_1 i_1' + qC^{-1} + u; \quad qC^{-1} = L_2 i_2'; \quad i_1 = i_2 + q'$$

или в терминах координат состояния:

$$\begin{aligned} x_1' &= -RL_1^{-1} x_1 - (L_1 C)^{-1} x_3 + L_1^{-1} u; \\ x_2' &= (L_2 C)^{-1} x_3; \\ x_3' &= -x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Выходные координаты системы определяются соотношениями

$$y_1 = u - qC^{-1} - i_1 R; \quad y_2 = qC^{-1}$$

или в терминах координат состояния:

$$y_1 = -Rx_1 - C^{-1}x_3 + u; \quad y_2 = C^{-1}x_3.$$

Заметим, что в данном случае координаты вектора выхода зависят не только от координат состояния, но и от управления:  $y = Cx + Du$ .

Рассматриваемая система — третьего порядка, матрицы ее модели принимают вид

$$A = \begin{pmatrix} -RL_1^{-1} & 0 & -(L_1 C)^{-1} \\ 0 & 0 & (L_2 C)^{-1} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} B &= (L_1^{-1} \quad 0 \quad 0)^T; \\ C &= \begin{pmatrix} -R & 0 & -C^{-1} \\ 0 & 0 & C^{-1} \end{pmatrix}; \\ D &= (1 \quad 0)^T. \end{aligned}$$

2. Движение математического маятника описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\psi'' + \omega^2 \sin \psi = 0; \quad \psi(0); \quad \psi'(0),$$

очевидными координатами состояния являются:  $x_1 = \psi$ ,  $x_2 = \psi'$ , поэтому модель системы принимает вид

$$x_1' = x_2; \quad x_2' = -\omega^2 \sin x_1; \quad x_1(0); \quad x_2(0).$$

3. Движение тележки массой  $M$  под действием силы  $F(t)$  и сопротивления движению  $R(p')$  описывается дифференциальным уравнением

$$Mp'' = F(t) - R(p'),$$

где  $p$ ,  $p'$  — соответственно перемещение и скорость перемещения тележки.

Полагая  $R = kp'$ ,  $a = -kM^{-1}$ ,  $u(t) = M^{-1} F(t)$ , получим линейную модель движения:

$$x_1' = x_2; \quad x_2' = ax_2 + u(t); \quad x_1(0); \quad x_2(0).$$

4. Управляемое движение математического маятника массой  $m$  на подвижной платформе массой  $M$  под действием силы  $F(t)$  без трения описывается в неподвижной системе координат, представленной на рис. 12, а в виде нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} Mp'' &= F(t) - T \sin \psi; \\ m\psi'' &= T \sin \psi; \\ mz'' &= mg - T \cos \psi, \end{aligned}$$

где  $T$  — натяжение нити маятника;

$$y = p - L \sin \psi; \quad z = L \cos \psi.$$

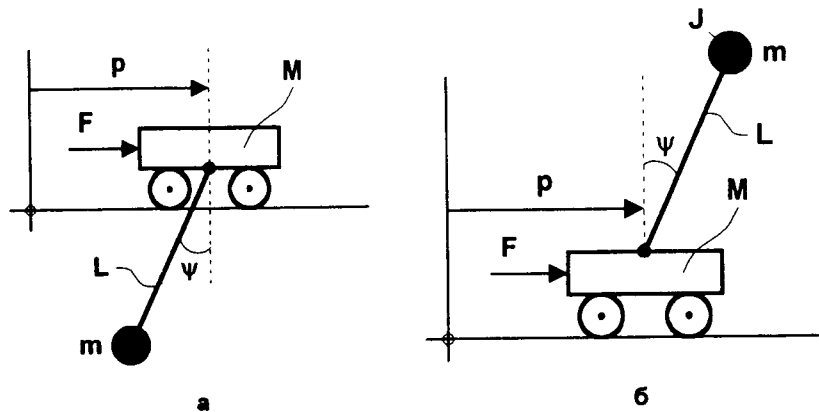


РИС. 12

Введем переменные состояния системы, положив  $x_1 = p$ ,  $x_2 = p'$ ,  $x_3 = \psi$ ,  $x_4 = \psi'$ , а также  $u(t) = F(t) M^{-1}$ , тогда математическая модель движения системы принимает вид

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2; \\ x_2' &= (-a_1 \sin x_3 \cos x_3 - a_2 x_4^2 \sin x_3 + u(t))(1 + a_3 \sin^2 x_3)^{-1}; \\ x_3' &= x_4; \\ x_4' &= (-a_4 \sin x_3 - a_3 x_4^2 \sin x_3 \cos x_3 + \\ &+ b_1 \cos x_3 u(t))(1 + a_3 \sin^2 x_3)^{-1}, \end{aligned}$$

где  $a_1 = mM^{-1}g$ ;  $a_2 = mM^{-1}L$ ;  $a_3 = mM^{-1}$ ;  
 $a_4 = (m + M)\omega^2 M^{-1}$ ;  $\omega^2 = gL^{-1}$ ;  $b_1 = L^{-1}$ .

Полагая колебания маятника малыми, получаем линейную модель системы:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2; \\ x_2' &= -a_1 x_3 + u(t); \\ x_3' &= x_4; \\ x_4' &= -a_4 x_3 + b_1 u(t). \end{aligned}$$

5. Математическая модель перевернутого маятника на подвижной платформе, которая перемещается под действием силы  $F(t)$  и сопротивления  $kp'$ , определена согласно схеме, изображенной на рис. 12, б в виде [3]

$$\begin{aligned} \Delta \psi'' - g \sin \psi + p'' \cos \psi &= 0; \\ Mp'' &= F(t) - kp', \end{aligned}$$

где  $\Delta = (J + mL^2)(mL)^{-1}$  — эффективная длина маятника;  
 $J$  — момент инерции маятника относительно своего центра тяжести;  
 $M, m$  — масса соответственно платформы и маятника.

Выбирая в качестве координат вектора состояния

$$\begin{aligned} x_1 &= p; \quad x_2 = p'; \\ x_3 &= p + \Delta \psi; \quad x_4 = p' + \Delta \psi' \end{aligned}$$

и полагая колебания малыми, получим линейную модель движения перевернутого маятника на платформе:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2; \\ x_2' &= -kM^{-1}x_2 + M^{-1}F(t); \\ x_3' &= x_4; \\ x_4' &= (-x_1 + x_3)g\Delta^{-1}. \end{aligned}$$

6. Система, эквивалентное представление которой изображено на рис. 13, состоит из двух вертикально подвешенных на пружинах масс, к одной из которых приложена управляющая сила. Пружины предполагаются невесомыми с линейными, но разными характеристиками. Движение масс сопровождается вязким сопротивлением.

Состояние системы можно оценивать четырьмя координатами:  $x_1, x_2$  — перемещение и скорость перемещения первой массы,  $x_3, x_4$  — перемещение и скорость перемещения второй массы. Вектор управления содержит две компоненты: управляющую силу и ускорение земного притяжения  $u = (f(t), g)^T$ .

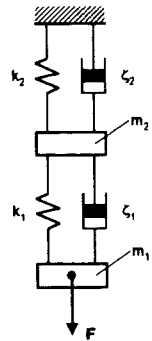


РИС. 13

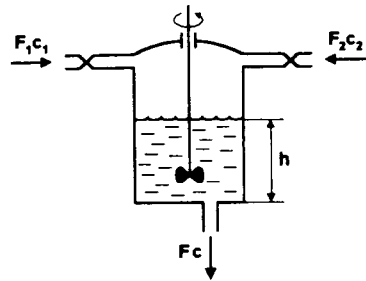


РИС. 14

Матрица состояния в этом случае принимает вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1/m_1 & -\zeta_1/m_1 & k_1/m_1 & \zeta_1/m_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1/m_2 & \zeta_1/m_2 & -(k_1+k_2)/m_2 & -(\zeta_1+\zeta_2)/m_2 \end{pmatrix}$$

при этом матрица управления:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/m_1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Математическая модель технологического процесса перемешивания двух потоков, содержащих разные вещества различной концентрации, схема которого изображена на рис. 14, представляется двумя уравнениями баланса масс [3]:

$$V'(t) = F_1(t) + F_2(t) - F(t);$$

$$(c(t) V(t))' = c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) - c(t) F(t);$$

и уравнением выхода

$$F(t) = kV^{0.5}(t),$$

где  $V(t)$  — объем жидкости в баке;  
 $F(t), c(t)$  — соответственно расход и концентрация выходного потока;  
 $c_1, F_1(t), c_2, F_2(t)$  — соответственно концентрация и расходы входных потоков;  
 $k$  — экспериментальная постоянная.

В этой системе входными переменными являются  $F_1(t), F_2(t)$ ; выходными переменными являются  $c(t), F(t)$ . Координатами состояния системы выбраны  $V(t), c(t)$  — текущие объем и концентрация смешанного продукта.

8. Математическая модель генератора постоянного тока, эквивалентная схема которого составлена в предположении постоянства частоты вращения якоря, отсутствия гистерезиса и полной компенсации реакции якоря, изображена на рис. 15, а, представляется уравнением якорной цепи, характеристикой холостого хода и уравнением цепи возбуждения:

$$e_r = u_r + R_r i_{я} + L_r i_{я}';$$

$$e_r = f(i_{я});$$

$$u_b = R_b i_b + L_b i_b'.$$

9. Математическая модель двигателя постоянного тока независимого возбуждения, эквивалентная схема которого изображена на рис. 15, б, представляется уравнением якорной цепи и внешним уравнением:

$$u_d = R_d i_d + L_d i_d' + C\omega;$$

$$J\omega' = C i_d - M_c,$$

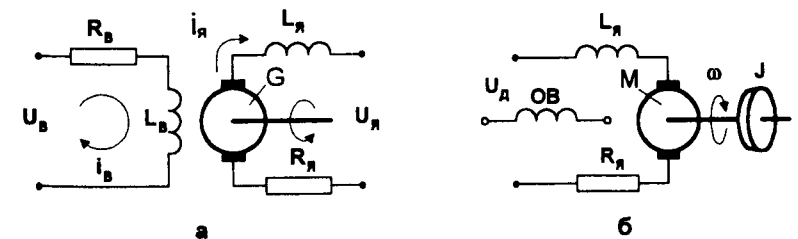


РИС. 15

где  $J$  — момент инерции якоря и нагрузки, приведенный к валу двигателя;  
 $C$  — конструктивная постоянная;  
 $M_c$  — момент сопротивления на валу двигателя.

10. На рис. 16 представлена схема электропривода по структуре Г-Д, который используется для регулирования частоты вращения рабочей машины. Линейная модель такой системы составляется с использованием моделей 7, 8 и в предположении линейности характеристики холостого хода в окрестности рабочей точки. Модель содержит уравнение якорной цепи, уравнение цепи возбуждения генератора, уравнение нагрузки и уравнение замыкания:

$$\begin{aligned} e_r &= R_r i_r + L_r i_r' + C\omega; \\ u_b &= R_b i_b + L_b i_b'; \\ e_r &= k_b i_b; \\ J\omega' &= C i_r - M_c; \\ u_b &= k_y(U - k_\omega \omega), \end{aligned}$$

где  $k_b$  — коэффициент наклона характеристики холостого хода;  
 $k_y$  — коэффициент усиления усилителя мощности;  
 $k_\omega$  — коэффициент передачи датчика частоты вращения.

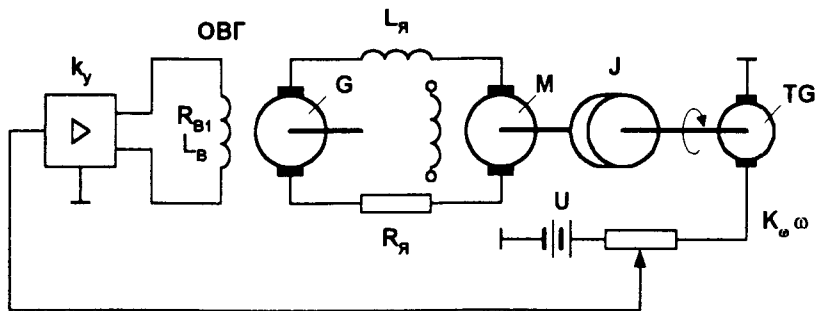


РИС. 16

Поскольку данная система третьего порядка, введем три координаты состояния:

$$x_1 = e_r; \quad x_2 = i_r; \quad x_3 = \omega.$$

В этих условиях модель системы задается тремя матрицами:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -R_b L_b^{-1} & 0 & -k_b k_y k_\omega L_b^{-1} \\ L_r^{-1} & -R_r L_r^{-1} & -C L_r^{-1} \\ 0 & C J^{-1} & 0 \end{pmatrix}; \\ B &= (k_b k_y L_b^{-1} \quad 0 \quad 0)^T; \\ C &= (0 \quad 0 \quad k_\omega). \end{aligned}$$

11. Математическая модель электродвигателя переменного тока в определенных предположениях [4] может быть представлена нелинейным уравнением первого порядка:

$$J\omega' + k_v \omega + k_m \omega^3 + k_f \operatorname{sgn} \omega = kU,$$

где  $\omega$  — частота вращения вала двигателя;  
 $U$  — управляющее напряжение;  
 $J$  — момент инерции якоря;  
 $k_v, k_m, k_f, k$  — коэффициенты скоростного трения, нелинейной механической характеристики, трения покоя, передаточный коэффициент соответственно.

12. Математическая модель движения второй ступени ракеты в предположении малости аэродинамических сил сопротивления и кривизны Земли получена из условий равновесия сил и моментов, представленных на рис. 17, а:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= S \cos(\zeta + \alpha); \\ m\ddot{z} &= S \sin(\zeta + \alpha) - mg; \\ J\ddot{\zeta} &= -SL \sin \alpha, \end{aligned}$$

где  $m = (m_0 - \mu t)$  — переменная масса ракеты;  
 $J = \mu t$  — переменный момент инерции ракеты;  
 $S, L, k, \mu$  — постоянные параметры.

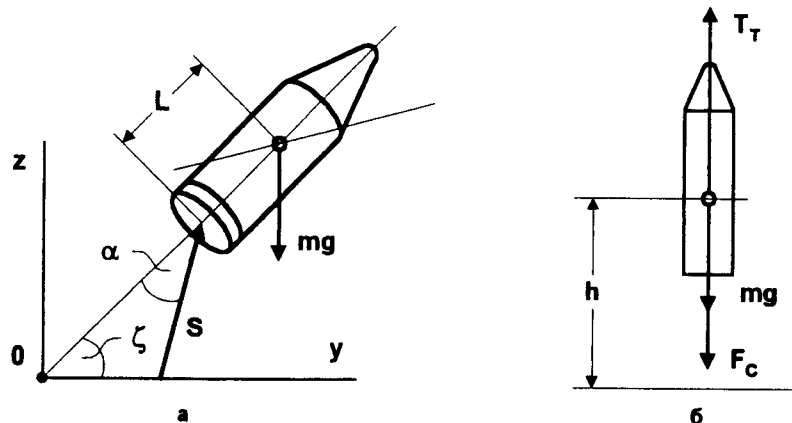


РИС. 17

Выбрав в качестве координат состояния кинематические переменные:

$$x_1 = y; \quad x_2 = y'; \quad x_3 = z; \quad x_4 = z'; \quad x_5 = \zeta; \quad x_6 = \zeta'$$

а в качестве управления — угловой наклон силы тяги  $u(t) = \alpha(t)$ , получим модель движения ракеты:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2; \\ x_2' &= a_1(1 - a_2 t)^{-1} \cos(x_5 + u(t)); \\ x_3' &= x_4; \\ x_4' &= a_1(1 - a_2 t)^{-1} \sin(x_5 + u(t)) - g; \\ x_5' &= x_6; \\ x_6' &= -a_3(1 - a_2 t)^{-1} \sin u(t), \end{aligned}$$

где  $a_1 = S m_0^{-1}$ ;  $a_2 = \mu m_0^{-1}$ ;  $a_3 = SL(km_0)^{-1}$ .

13. Модель вертикального движения ракеты (рис. 17, б) представляется одним нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$m(t)h'' = T_T - F_C - m(t)g,$$

где  $T_T = k_T m'(t)$  — сила тяги ракеты;

$F_C = k_F (h')^2$  — сила аэродинамического сопротивления.

Введем координаты состояния:  $x_1 = h$ ,  $x_2 = h'$ ,  $x_3 = m(t)$ . Очевидно, управлением является сила тяги, выход модели — высота подъема. Сама модель движения представляется в виде

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2; \\ x_2' &= -k_F x_2^2 x_3^{-1} - g + x_3^{-1} u(t); \\ x_3' &= k_T^{-1} u(t). \end{aligned}$$

14. Движение твердого тела с одной неподвижной точкой, на которое действует только сила тяжести, рассматривается относительно неподвижных осей, жестко связанных с Землей, описывается тремя динамическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} J_x \omega_x' + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= M_x(t); \\ J_y \omega_y' + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x &= M_y(t); \\ J_z \omega_z' + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= M_z(t). \end{aligned}$$

Угловые скорости вращения тела непосредственно определяются кинематическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \psi' \sin \theta \sin \varphi + \theta' \cos \varphi; \\ \omega_y &= \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi; \\ \omega_z &= \psi' \cos \theta + \varphi'. \end{aligned}$$

В этих уравнениях:  $J_x, J_y, J_z$  — моменты инерции относительно главных осей инерции;  $M_x, M_y, M_z$  — моменты действующих сил относительно главных осей инерции;  $\varphi, \psi, \theta$  — углы Эйлера, отражающие ориентацию главных осей относительно неподвижных осей.

Вектор состояния модели движения твердого тела содержит шесть координат:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi; \quad x_2 = \psi; \quad x_3 = \theta; \\ x_4 &= \omega_x; \quad x_5 = \omega_y; \quad x_6 = \omega_z; \end{aligned}$$

управлением для системы является вектор моментов действующих сил, выходом — положение тела относительно подвижных осей или угловые скорости вращения тела.

### 2.3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМЫ

Приближенное представление нелинейных математических моделей в виде линейных, быть может в малой области пространства состояния, называют *линеаризацией*. Пусть  $x^0(t)$  — известное решение уравнения (2.1), называемое номинальным, которое получено при известном — номинальном управлении  $u^0(t)$ . Пусть функции  $F(x(t), u(t), t)$  и  $G(x(t), u(t), t)$  непрерывно дифференцируемы по всем своим переменным. В этом случае в малой окрестности  $x^0(t)$ ,  $u^0(t)$  возможно осуществить линеаризацию нелинейной модели (2.1).

Положим

$$u^*(t) = u^0(t) + u(t);$$

$$x^*(t) = x^0(t) + x(t),$$

где  $x^*(t)$ ,  $u^*(t)$  — реальное движение и реальное управление соответственно;

$x(t)$ ,  $u(t)$  — малые "возмущения" номинальной траектории  $x^0(t)$  и номинального управления  $u^0(t)$ .

Подставим  $x^*(t)$ ,  $u^*(t)$  в нелинейную модель (2.1) и разложим функцию  $F(x, u, t)$  в окрестности  $x^0(t)$ ,  $u^0(t)$  в ряд Тейлора, оставив от разложения ее линейную часть:

$$(x^0(t) + x(t))' = F(x^0, u^0, t) + J_x[F(x^0, u^0, t)]x(t) + J_u[F(x^0, u^0, t)]u(t).$$

Здесь  $J_x$ ,  $J_u$  — матрицы Якоби функции  $F(x, u, t)$ , вычисленные относительно  $x^0(t)$  и  $u^0(t)$ , оказываются известными матрицами, возможно, с постоянными элементами:

$$A(t) = J_x[F(x^0, u^0, t)]; \quad B(t) = J_u[F(x^0, u^0, t)].$$

Эти матрицы являются соответственно *матрицей состояния* и *матрицей входа* искомой линейной модели. Начальным условием для полученной линейной модели является вектор  $x(0) = x^0(0)$ .

Аналогично осуществляется линейное приближение функции  $G(x(t))$  в окрестности  $x^0(t)$ ,  $u^0(t)$ :

$$y^0(t) + y(t) = G(x^0) + J_x[G(x^0)]x(t),$$

где  $y^0(t)$  — вектор выхода, отвечающий номинальной траектории  $x^0(t)$  и управлению  $u^0(t)$ :  $y^0(t) = G(x^0)$ ;

$y(t)$  — отклонение вектора выхода от номинального.

Матрица выхода линейной системы:

$$C(t) = J_x[G(x^0)].$$

#### Примеры

1. Рассмотрим математическую модель [3] технологического процесса перемешивания двух потоков, содержащих разные вещества различной концентрации, схема которого изображена на рис. 14:

$$V'(t) = F_1(t) + F_2(t) - F(t);$$

$$(c(t)V(t))' = c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) - c(t) F(t);$$

$$F(t) = k V^{0.5}(t).$$

Эта модель, очевидно, нелинейная. Осуществим линеаризацию процесса в номинальном рабочем режиме, который определяется координатами состояния  $V^0(t)$ ,  $c^0(t)$ , номинальными входными расходами  $F_1^0(t)$ ,  $F_2^0(t)$  и номинальным выходным расходом  $F^0(t)$ .

В стационарном номинальном режиме справедливо, что

$$F_1^0(t) + F_2^0(t) - F^0(t) = 0;$$

$$c_1 F_1^0(t) + c_2 F_2^0(t) - c^0(t) F^0(t) = 0;$$

$$F^0(t) = k (V^0(t))^{0.5}.$$

Текущее состояние процесса, а также текущие значения входных расходов и выходные переменные — расход и концентрацию представим в виде

$$V(t) = V^0(t) + x_1(t); \quad c(t) = c^0(t) + x_2(t);$$

$$F_1(t) = F_1^0(t) + u_1(t); \quad F_2(t) = F_2^0(t) + u_2(t);$$

$$F(t) = F^0(t) + y_1(t); \quad c(t) = c^0(t) + y_2(t).$$

Линейное приближение функции  $F(t)$  в окрестности рабочего режима имеет вид

$$F(t) = F^0(t) + 0,5 k (V^0(t))^{-0,5} x_1(t),$$

или, что одно и то же:  $F(t) = F^0(t) + 0,5 F^0(t) (V^0(t))^{-1} x_1(t)$ .

Используя это приближение в уравнениях состояния процесса перемешивания, получим искомую линеаризованную модель процесса в окрестности рабочего режима:

$$x_1' = -0,5\alpha x_1(t) + u_1(t) + u_2(t);$$

$$x_2' = -\alpha x_2(t) + \beta_1 u_1(t) + \beta_2 u_2(t);$$

$$y_1(t) = 0,5\alpha x_1(t);$$

$$y_2(t) = x_2(t)$$

с параметрами

$$\alpha = F^0(t)(V^0(t))^{-1}; \quad \beta_1 = (c_1 - c^0)(V^0(t))^{-1}; \quad \beta_2 = (c_2 - c^0)(V^0(t))^{-1}.$$

Матрицы полученной модели:

$$A = \begin{pmatrix} -0,5\alpha & 0 \\ 0,5\alpha & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0,5\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Математическая модель движения маятника на подвижной платформе представляется системой нелинейных уравнений. Полагаем колебания маятника малыми. В этом случае "номинальным движением" является точка относительного покоя маятника. Выполняем линеаризацию уравнений движения системы. Линейная модель движения приведена в 2.2, примеры 4, 5.

3. Модель генератора постоянного тока (2.2, пример 7) содержит нелинейную характеристику холостого хода, которая для целей линеаризации может быть спрямлена в окрестности рабочей точки. И тогда зависимость  $e_r = f(i_a)$  приближенно можно рассматривать в виде  $e_r = k i_a$ , где  $k$  — значение углового наклона касательной к функции  $f(i_a)$  в рабочей точке.

4. Математическая модель двухфазного асинхронного двигателя с ортогональными обмотками управления и возбуждения содержит нелинейное уравнение моментов:

$$J \dot{\omega} = M(\omega, u) + M_c,$$

где  $\omega$  — частота вращения вала двигателя;

$J$  — момент инерции ротора и рабочего механизма, приведенный к валу двигателя;

$M, M_c$  — соответственно вращающий момент и момент сопротивления на валу двигателя;

$u$  — напряжение управления.

Механические характеристики асинхронного двигателя  $M(\omega; u)$  представляются семейством кривых, отражающих зависимости частоты вращения от вращающего момента с параметром семейства — напряжение управления. Линеаризация семейства механических характеристик осуществляется путем замены кривых параллельными прямыми:

$$M(\omega, u) = -k_1 \omega + k_2 u.$$

## 2.4. МОДЕЛИ ТИПА "ВХОД – ВЫХОД"

Математическая модель (2.3) описывает внутренние связи между переменными состояния системы, поэтому такие модели называют *внутренними*. *Внешние модели* отражают зависимость между входными  $u(t)$  и выходными  $y(t)$  сигналами системы.

Пусть рассматривается линейная система с одним входом и одним выходом, процессы в которой описываются неоднородным линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{(n-1)} y' + a_n y =$$

$$= b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_{(m-1)} u' + b_m u, \quad (2.5)$$

где  $u(t), u^{(q)}(t)$  — входной сигнал системы и  $q = 1, \dots, m$  его производных;

$y(t), y^{(k)}(t)$  — выходной сигнал системы и  $k = 1, \dots, n$  его производных.

Применив к этому уравнению *оператор дифференцирования Коши*  $D = d/dt$ , получим операторное представление уравнения системы:

$$\begin{aligned} & (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = \\ & = (b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \dots + b_{m-1} D + b_m) u. \end{aligned}$$

Запишем это представление в иной форме:  $y(t) = B(D)/A(D)u(t)$ , где обозначено:

$$\begin{aligned} B(D) &= b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \dots + b_{m-1} D + b_m; \\ A(D) &= a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n. \end{aligned}$$

Функция  $H(D) = B(D)/A(D)$  называется *операторной передаточной функцией системы*, а уравнение

$$y(t) = H(D) u(t) \quad (2.6)$$

— *операторной моделью* системы, или *внешней моделью* системы.

Полином  $A(D)$  называется *характеристическим многочленом* системы, а его корни — *полюсами*, или *характеристическими числами*, системы. Корни полинома  $B(D)$  есть *нули* системы.

Представление внешней модели в частотной области позволяет осуществить преобразование Лапласа.

Пусть

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]; \quad U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$$

— лапласовы преобразования входного и выходного сигналов, тогда моделью системы оказывается выражение

$$Y(s) = H(s) U(s), \quad (2.7)$$

полученное преобразованием уравнения (2.5) при нулевых начальных условиях.

Выражение  $H(s)$  называют *передаточной функцией* системы. Очевидна взаимосвязь двух функций:  $H(s)$  и  $H(D)$ .

Внешняя модель системы единственна, тогда как внутренних моделей у системы столько, сколько можно составить для

нее векторов состояния  $B$  самом деле, пусть система задана своими матрицами  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и пусть  $x(0) = 0$ . Преобразуем, по Лапласу, стационарную модель (2.3):

$$sX(s) = AX(s) + BU(s), \quad Y(s) = CX(s),$$

где  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]; Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]; U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ .

Откуда находим, что

$$Y(s) = [C(sE - A)^{-1}B]U(s).$$

Значит, по смыслу, в силу представления (2.7) выражение в скобках суть *матричная передаточная функция* системы:

$$C(sE - A)^{-1}B = H(s); \quad H(s) = (H_{ij}(s)). \quad (2.8)$$

Заметим, поскольку  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1(t)$ , то передаточную функцию можно рассматривать, что следует из выражения (2.7), как преобразование Лапласа реакции системы на входной единичный импульс при отсутствии всех прочих внешних воздействий. А произвольный элемент  $H_{ij}(s)$  матричной передаточной функции в этом случае оказывается преобразованием Лапласа реакции на  $i$ -м выходе системы, если только на  $j$ -й вход системы воздействует единичный импульс.

Для эквивалентной модели системы передаточная функция в силу (2.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}(s) &= CP^{-1}(sE - PAP^{-1})^{-1}PB = CP^{-1}(sPP^{-1} - PAP^{-1})^{-1}PB = \\ &= CP^{-1}(P(sE - A)P^{-1})^{-1}PB = \\ &= CP^{-1}((sE - A)P^{-1})^{-1}P^{-1}PB = CP^{-1}P(sE - A)^{-1}P^{-1}PB = H(s). \end{aligned}$$

Таким образом, передаточная функция, а значит и внешняя модель системы, не зависят от выбора координат состояния и являются инвариантами системы.

## 2.5. ГРАФОВЫЕ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ

Графическое представление взаимосвязей в системе в виде *структурных схем* или *графов* используется в теории управления в той же мере, что и математические модели.



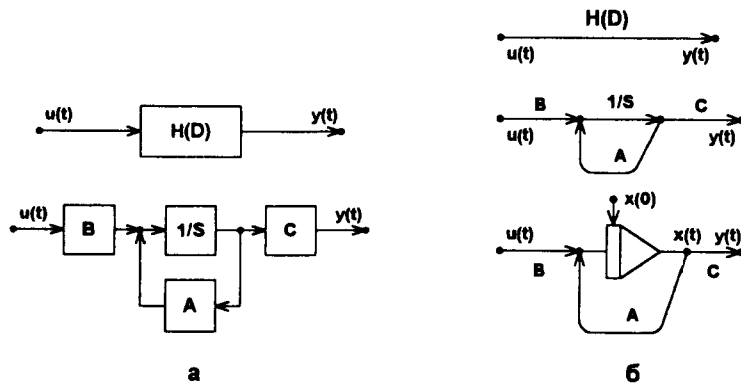


РИС. 18

При построении структурной схемы могут быть использованы два графических выражения: в первом для изображения сигналов используются линии со стрелкой, операторы изображаются прямоугольником, операция суммирования — точкой или кружком; во втором случае точки используются для обозначения сигналов, а направленные дуги — для обозначения операторов. На рис. 18, а, б изображены оба вида графического представления моделей системы.

Заметим, что в графовых моделях для обозначения операции интегрирования с произвольными начальными условиями иногда используется специальный графический элемент, изображенный на рис. 18, б.

Будем различать три основные операции над графовыми моделями систем — структурными схемами: последовательное, параллельное и встречно-параллельное (с обратной связью) соединения схем.

Каждая  $i$ -я схема имеет вход  $u_i$ , выход  $y_i$  и передаточную функцию  $W_i$ . В результате выполнения операции над схемами получается вновь схема, которая имеет вход  $u$ , выход  $y$  и передаточную функцию  $W$ .

Для последовательного соединения двух схем (рис. 19, а) имеем

$$u = u_1; y = y_2; u_2 = y_1; y_2 = W_2 y_1; y_1 = W_1 u_1,$$

поэтому

$$y = W_2 W_1 u.$$

Значит, передаточную функцию последовательного соединения двух схем следует вычислять по формуле

$$W = W_2 W_1.$$

Для параллельного соединения двух схем (рис. 19, б) имеем

$$u = u_1 = u_2; y = y_1 + y_2; y = (W_1 + W_2) u.$$

Следовательно, передаточную функцию параллельного соединения двух схем следует вычислять по формуле

$$W = W_1 + W_2.$$

Для встречно-параллельного соединения двух схем (рис. 19, в) имеем

$$y = y_1; u_1 = u + y_2; y = W_1(u + y_2); y_2 = W_2 y,$$

поэтому

$$y = (E - W_2 W_1)^{-1} W_1 u.$$

Передаточную функцию встречно-параллельного соединения двух схем следует вычислять по формуле

$$W = (E - W_2 W_1)^{-1} W_1.$$

Для схем с одним входом и одним выходом передаточную функцию соединения двух схем с обратной связью вычисляют по формуле

$$W = W_1 / (1 - W_2 W_1).$$

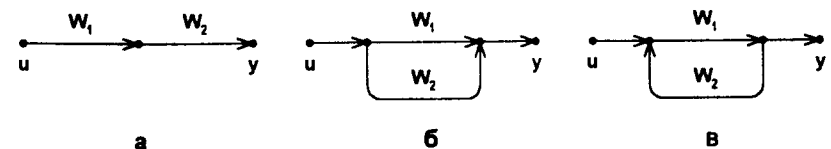


РИС. 19

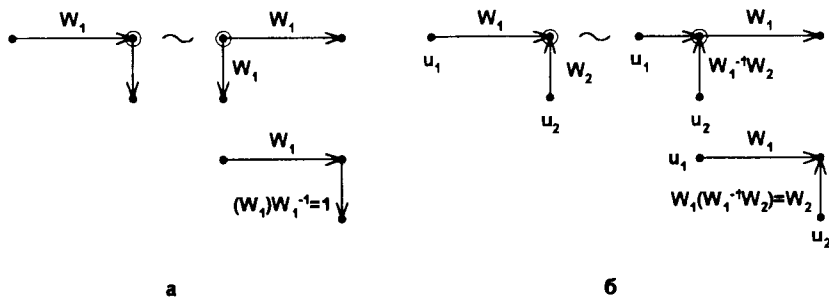


РИС. 20

Алгебра структурных схем и передаточных функций содержит правила эквивалентных преобразований схем, среди которых основными являются **правила переноса** точек суммирования и точек ветвления. На рис. 20 приведено графическое представление этих правил.

Алгоритмическую процедуру эквивалентных преобразований структурных схем и определения передаточной функции системы можно свести к трем шагам:

- 1) выполнить перенос точек ветвления и суммирования так, чтобы в результирующей схеме образовались лишь последовательные, параллельные цепи и цепи обратных связей;
- 2) выполнить операции соединения схем;
- 3) составить передаточные функции схем соединений и всей системы.

### Примеры

1. Передаточная функция системы, линейная модель которой представлена матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -0,5\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0,5\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

приобретает согласно (2.7) вид

$$H(s) = \begin{pmatrix} 0,5\alpha / (s + 0,5\alpha) & 0,5\alpha / (s + 0,5\alpha) \\ \beta_1 / (s + \alpha) & \beta_2 / (s + \alpha) \end{pmatrix}.$$

2. Передаточная функция системы, структурная схема которой представлена на рис. 21, а, может быть найдена только после переноса точки суммирования, например, так, как это показано на рис. 21, б. Затем, выполняя операции соединения, получим

$$W_7 = W_1 W_2 + W_3; \quad W_8 = W_4 / (1 - W_6 W_4); \quad W_6 = W_2 W_5.$$

Окончательно искомая передаточная функция системы принимает вид

$$W = W_8 W_7.$$

3. На рис. 22 представлена каноническая структура автоматической системы, которая испытывает задающее  $u(t)$  и возмущающее  $f(t)$  воздействия, имеет выход  $y(t)$ . Сигнал рассогласования или ошибки воспроизведения  $e(t) = u(t) - y(t)$  можно также рассматривать как выходной сигнал, поэтому матричная передаточная функция такой системы содержит четыре элемента:

$$\begin{matrix} H_{yu}(s); & H_{yf}(s); \\ H_{eu}(s); & H_{ef}(s). \end{matrix}$$

Первая строка этой матрицы представлена передаточными функциями выхода от задающего и возмущающего воздействий соответственно, вторая строка — передаточными функциями ошибки от задания и возмущения. При этом

$$\begin{matrix} H_{yu} = W_0 W_1 / (1 + W_0 W_1); & H_{yf} = W_1 / (1 + W_0 W_1); \\ H_{eu}(s) = 1 - H_{yu}; & H_{ef}(s) = -H_{yf}. \end{matrix}$$

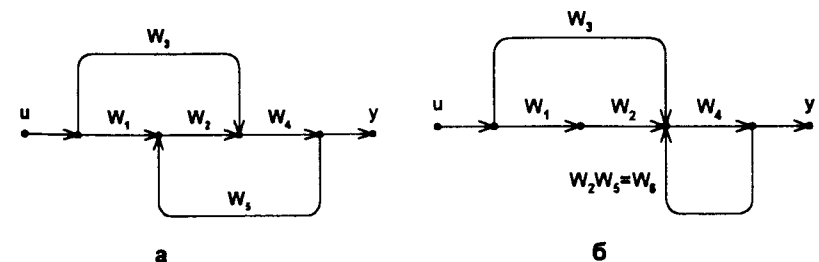


РИС. 21

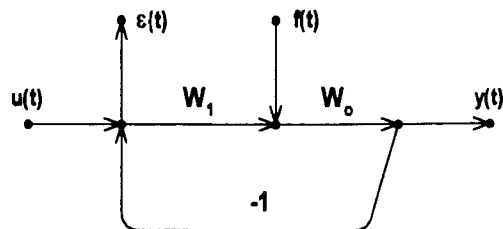


РИС. 22

Уравнение замкнутой автоматической системы канонической структуры в силу **принципа суперпозиции** принимает вид

$$Y(s) = H_{yu}(s)U(s) + H_{yf}(s)F(s);$$

$$E(s) = (1 - H_{yu}(s))U(s) - H_{yf}(s)F(s),$$

где  $Y(s)$ ,  $U(s)$ ,  $F(s)$ ,  $E(s)$  — лапласовы преобразования выходного и входного сигналов, возмущения и сигнала ошибки.

4. Для передаточных функций частного вида  $H(D) = 1/A(D)$  известна еще одна каноническая форма представления, когда в качестве координат состояния принимают выходную переменную и ее  $(n-1)$  производные:

$$x_1 = y(t);$$

$$x_2 = x_1';$$

$$x_3 = x_2', \dots, x_n = x_{n-1}'.$$

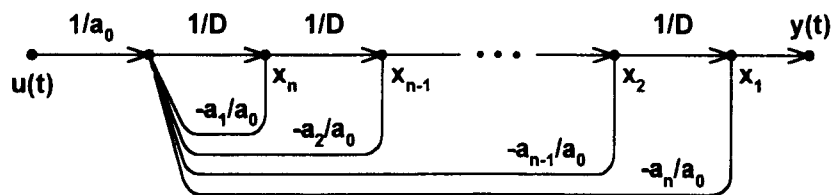


РИС. 23

Такое представление модели, называемое **нормальной формой Коши**, задается матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -a_n/a_0 & -a_{n-1}/a_0 & -a_{n-2}/a_0 & \dots & -a_1/a_0 \end{pmatrix};$$

$$B = (0 \ 0 \ \dots \ 1/a_0)^T;$$

$$C = (1 \ 0 \ \dots \ 0).$$

Структурная схема этой модели изображена на рис. 23.

## 2.6. ВЗАИМОСВЯЗЬ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМЫ

Внутренняя, внешняя и графовые модели системы взаимосвязаны. Внешняя модель однозначно определяется по своей структурной схеме и по внутренней модели согласно соотношению (2.8). Эквивалентные внутренние модели системы зависят от выбора координат состояния и поэтому неоднозначно восстанавливаются по внешней модели.

Пусть для системы с одним входом и одним выходом передаточная функция имеет частный вид:  $H(D) = 1/A(D)$  и  $\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$  — различные действительные корни полинома  $A(D)$ . Рассмотрим два из возможных представлений дробно-рационального выражения передаточной функции — аддитивное и мультипликативное:

$$H(D) = \sum c_i / (D - \lambda_i); \quad H(D) = \prod 1 / (D - \lambda).$$

В первом — аддитивном случае — введем координаты состояния по правилу

$$x_i = u(t) / (D - \lambda_i),$$

поэтому  $x_i' = \lambda_i x_i + u(t)$  и выход системы определяется выражением  $y(t) = \sum c_i x_i$ .

При этом внутренняя модель системы определяется матрицами:

$$\mathbf{A} = \text{diag} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n);$$

$$\mathbf{B} = (1, 1, \dots, 1)^T;$$

$$\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Во втором — мультипликативном случае — введем координаты состояния, например, по правилу

$$x_1 = u(t)/(D - \lambda_1);$$

$$x_i = x_{i-1}/(D - \lambda_{i-1});$$

$$i = 2, \dots, n.$$

Поэтому

$$x'_1 = \lambda_1 x_1 + u(t); \quad x'_i = \lambda_i x_i + x_{i-1}; \quad i = 2, \dots, n$$

и выход системы  $y(t) = x_n$ .

Внутренняя модель системы определяется матрицами:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_n \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B} = (1, 0, \dots, 0)^T;$$

$$\mathbf{C} = (0, 0, \dots, 1).$$

Пусть в общем случае дробно-рационального представления передаточной функции  $\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$  — различные действительные корни полинома  $A(D)$  и  $\{\gamma_j, j = 1, \dots, m\}$  — различные действительные корни полинома  $B(D)$ ,  $m \leq n$ . Рассмотрим одно из возможных таких представлений:

$$H(D) = \prod_{j=1, \dots, m} (D - \gamma_j) / (D - \lambda_j) \prod_{k=m+1, \dots, n} 1 / (D - \lambda_k).$$

Введем координаты состояния, например, по правилу:

$$x_1 = u(t)(\lambda_1 - \gamma_1)/(D - \lambda_1); \quad z_1 = x_1 + u(t);$$

$$x_j = z_j(t)(\lambda_j - \gamma_j)/(D - \lambda_j); \quad z_j = x_j + z_{j-1}; \quad j = 2, \dots, m;$$

$$x_{m+1} = z_m / (D - \lambda_{m+1});$$

$$x_k = x_{k-1} / (D - \lambda_k); \quad k = m + 1, \dots, n,$$

где  $z_j$  — вспомогательные переменные.

В этих условиях

$$x'_1 = \lambda_1 x_1 + (\lambda_1 - \gamma_1) u(t);$$

$$x'_2 = \lambda_2 x_2 + (\lambda_2 - \gamma_2) z_1; \quad z_1 = x_1 + u(t);$$

$$x'_3 = \lambda_3 x_3 + (\lambda_3 - \gamma_3) z_2; \quad z_2 = x_2 + z_1;$$

...

$$x'_m = \lambda_m x_m + (\lambda_m - \gamma_m) z_{m-1}; \quad z_{m-1} = x_{m-1} + z_{m-2};$$

$$x'_{m+1} = \lambda_{m+1} x_{m+1} + z_m; \quad z_m = x_m + z_{m-1};$$

$$x'_{m+2} = \lambda_{m+2} x_{m+2} + x_{m+1};$$

...

$$x'_n = \lambda_n x_n + x_{n-1},$$

кроме того, выходная переменная системы  $y(t) = x_n$ .

Искомая внутренняя модель системы определяется матрицами:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (\lambda_2 - \gamma_2) & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ (\lambda_3 - \gamma_3) & (\lambda_3 - \gamma_3) & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & & \\ (\lambda_m - \gamma_m) & (\lambda_m - \gamma_m) & (\lambda_m - \gamma_m) & \lambda_m & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda_{m+1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_{m+2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B} = ((\lambda_1 - \gamma_1), (\lambda_2 - \gamma_2), (\lambda_3 - \gamma_3), \dots, (\lambda_m - \gamma_m), 1, 0, \dots, 0)^T;$$

$$\mathbf{C} = (0, 0, \dots, 1).$$

Рассмотрим вновь общий вид дробно-рационального представления передаточной функции:

$$H(D) = (b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \dots + b_{m-1} D + b_m) / (D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n)$$

и пусть, к примеру,  $m = n - 1$ . Разделим числитель и знаменатель этого выражения на  $D^n$ :

$$H(D) = (b_0 D^{-1} + b_1 D^{-2} + \dots + b_{n-2} D^{-n+1} + b_{n-1} D^{-n}) / (1 + a_1 D^{-1} + \dots + a_{n-1} D^{-n+1} + a_n D^{-n}).$$

Поскольку данное выражение является передаточным оператором, то справедливо, что

$$y(t)(1 + a_1 D^{-1} + \dots + a_{n-1} D^{-n+1} + a_n D^{-n}) = u(t)(b_0 D^{-1} + b_1 D^{-2} + \dots + b_{n-2} D^{-n+1} + b_{n-1} D^{-n}).$$

Откуда следует, что

$$y(t) = u(t)(b_0 D^{-1} + b_1 D^{-2} + \dots + b_{n-2} D^{-n+1} + b_{n-1} D^{-n}) - y(t)(a_1 D^{-1} + \dots + a_{n-1} D^{-n+1} + a_n D^{-n}).$$

На рис. 24 приведена структура, реализующая полученное соотношение. На этом основании введем координаты состояния так, что

$$\begin{aligned} x_1' &= -a_n x_n + b_{n-1} u(t); \\ x_2' &= x_1 - a_{n-1} x_n + b_{n-2} u(t); \\ x_3' &= x_2 - a_{n-2} x_n + b_{n-3} u(t); \\ &\dots \\ x_n' &= x_{n-1} - a_1 x_n + b_0 u(t), \end{aligned}$$

при этом выходная переменная системы  $y(t) = x_n$ .

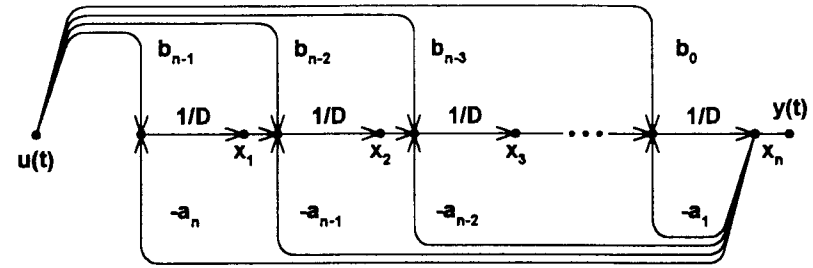


РИС. 24

### Примеры

1. Рассматривается система с операторной передаточной функцией:

$$H(D) = 1/(D^3 + 3D^2 + 2D).$$

Эта функция имеет три полюса  $\{0, 1, -2\}$ , поэтому ее аддитивное представление имеет вид

$$H(D) = 0,5/D - 1/(D + 1) + 0,5/(D + 2),$$

внутренняя модель задается матрицами:

$$\mathbf{A} = \text{diag}(0 \ -1 \ -2); \quad \mathbf{B} = (1 \ 1 \ 1); \quad \mathbf{C} = (0,5 \ -1 \ 0,5).$$

Мультипликативное представление передаточной функции системы имеет вид

$$H(D) = 1/(D(D + 1)(D + 2)).$$

Если введем координаты состояния по правилу

$$x_1 = u(t)/D; \quad x_2 = x_1/(D + 1); \quad x_3 = x_2/(D + 2),$$

то матрицы внутренней модели системы примут вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B} = (1 \ 0 \ 0)^T; \quad \mathbf{C} = (0 \ 0 \ 1).$$

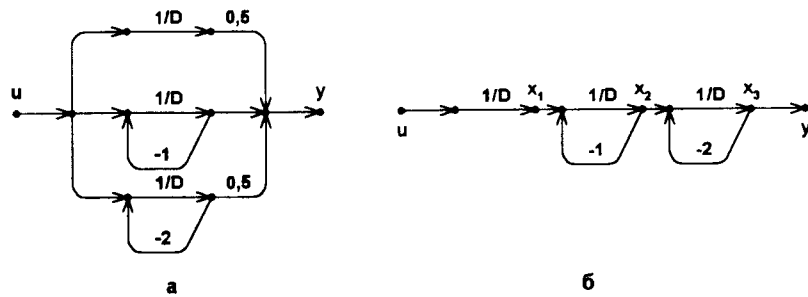


РИС. 25

Структурные схемы эквивалентных моделей изображены на рис. 25.

2. Рассматривается система с операторной передаточной функцией общего вида:

$$H(D) = (D^2 - D - 2)/(D^3 - 2D^2 - 5D + 6).$$

Эта функция имеет три полюса:  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 3$  и два нуля:  $\gamma_1 = -1$ ,  $\gamma_2 = 2$ , поэтому

$$H(D) = ((D+1)/(D-1))((D-2)/(D-3))(1/(D+2)) = (1 + 2/(D-1))(1 + 5/(D-3))(1/(D+2)).$$

Введем координаты состояния и вспомогательные переменные, например, по правилу:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2u(t)/(D-1); \quad z_1 = x_1 + u(t); \\ x_2 &= 5z_1/(D-3); \quad z_2 = z_1 + x_2; \\ x_3 &= z_2/(D+2). \end{aligned}$$

В этих условиях внутренняя модель системы приобретает вид

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2u(t); \\ x_2' &= 5x_1 + 3x_2 + 5u(t); \\ x_3' &= x_1 + x_2 - 2x_3 + u(t); \\ y(t) &= x_3. \end{aligned}$$

Заметим, что модель можно получить, используя аддитивное представление передаточной функции:

$$H(D) = c_1/(D+2) + c_2/(D-1) + c_3/(D-3).$$

Для определения постоянных  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  составляем уравнения:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 1; \\ -4c_1 - c_2 + c_3 &= -1; \\ 3c_1 - 6c_2 - 2c_3 &= -2, \end{aligned}$$

откуда находим:  $c_1 = 8/30$ ,  $c_2 = 10/30$ ,  $c_3 = 12/30$ .

Координаты состояния введем, например, по правилу:

$$x_1 = u(t)/(D+2); \quad x_2 = u(t)/(D-1); \quad x_3 = u(t)/(D-3).$$

В этих условиях внутренняя модель системы приобретает вид

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 + u(t); \\ x_2' &= x_2 + u(t); \\ x_3' &= 3x_3 + u(t); \\ y(t) &= 8/30x_1 + 10/30x_2 + 12/30x_3, \end{aligned}$$

а значит, матрицы этой системы имеют вид

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(-2 \quad 1 \quad 3); \\ B &= (1 \quad 1 \quad 1)^T; \\ C &= (8/30 \quad 10/30 \quad 12/30). \end{aligned}$$

Рассмотрим еще одно представление исходной передаточной функции:

$$H(D) = (D^{-1} - D^{-2} - 2D^{-3})/(1 - 2D - 5D^{-2} + 6D^{-3}),$$

из которого следует, что

$$y(t)(1 - 2D - 5D^{-2} + 6D^{-3}) = u(t)(D^{-1} - D^{-2} - 2D^{-3}).$$

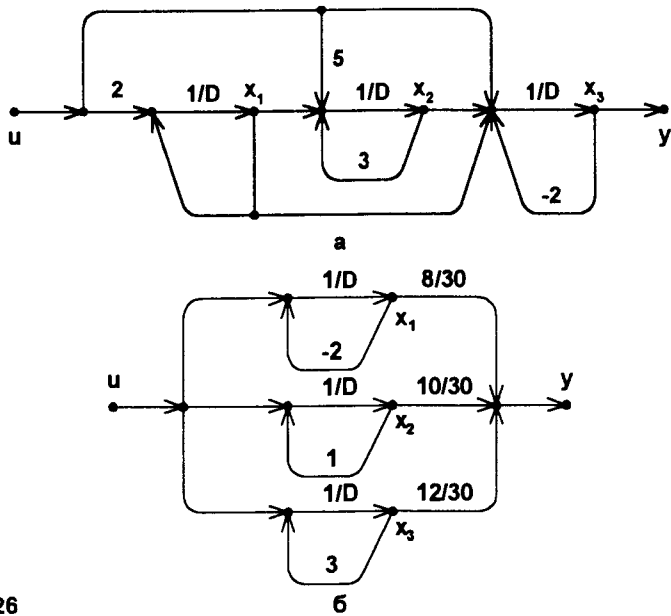


РИС. 26

Следовательно,

$$y(t) = u(t)(D^{-1} - D^{-2} - 2D^{-3}) + y(t)(2D + 5D^{-2} - 6D^{-3}).$$

В этих условиях внутренняя модель системы приобретает вид

$$\begin{aligned} x_1' &= -6x_3 - 2u(t); \\ x_2' &= x_1 + 5x_3 - u(t); \\ x_3' &= x_2 + 2x_3 + u(t); \\ y(t) &= x_3, \end{aligned}$$

а значит, матрицы этой системы имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{B} &= (-2 \ -1 \ 1)^T; \\ \mathbf{C} &= (0 \ 0 \ 1). \end{aligned}$$

Структурные схемы эквивалентных моделей изображены на рис. 26, а, б.

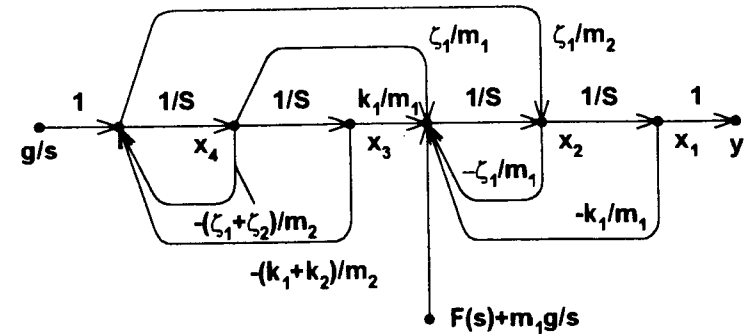


РИС. 27

3. Система, эквивалентное представление которой изображено на рис. 13, состоит из двух вертикально подвешенных на пружинах масс, к одной из которых приложена управляющая сила. Пружины предполагаются невесомыми с линейными, но разными характеристиками. Движение масс сопровождается вязким сопротивлением. Ранее, в 2.2 была составлена модель состояния системы, на этом основании можно построить графовую модель и составить внешнюю модель "управляющая сила — перемещение первой массы".

Графовая модель системы представлена на рис. 27. Внешняя модель системы "управляющая сила — перемещение первой массы" принимает вид

$$\begin{aligned} W(s) &= (m_2 s^2 + (\zeta_1 + \zeta_2)s + (k_1 + k_2))/\Delta; \\ \Delta &= (m_1 m_2 s^4 + (m_1 \zeta_1 + m_1 \zeta_2 + m_2 \zeta_1)s^3 + \\ &+ (m_1 k_1 + m_1 k_2 + m_2 k_1 + \zeta_1 \zeta_2)s^2 + (k_1 \zeta_2 + k_2 \zeta_1)s + k_1 k_2). \end{aligned}$$

4. На рис. 28 представлена функциональная схема системы стабилизации толщины прокатываемого стального листа. Толщина проката 1 изменяется с помощью обжимных валков 2. Усилие обжатия, создаваемое устройством 3, пропорционально углу поворота двигателя 4, который управляется со стороны

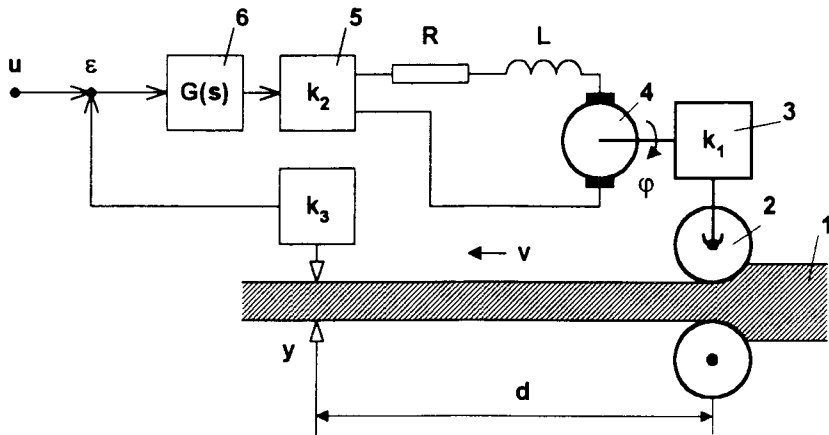


РИС. 26

якорной цепи через линейный усилитель 5. Суммарный момент инерции  $J$  обжимного устройства и двигателя, приведенный к валу двигателя, полагается неизменным. Регулятор 6 имеет известную передаточную функцию  $G(s)$ . Толщина прокатываемого стального листа измеряется линейно датчиком 7, который отстоит от места изменения толщины на известном расстоянии  $d$ . Полоса проката перемещается равномерно со скоростью  $v$ . Внешняя модель этой системы  $W_{ys}(s)$ : "ошибка в толщине листа — толщина листа" имеет вид

$$W_{ys}(s) = k_1 k_2 C e^{-\tau s} G(s) / (JLs^3 + JRs^2 + C^2 s),$$

где  $C$  — конструктивная постоянная двигателя;  
 $\tau = d/v$  — величина запаздывания сигнала, пропорциональная толщине листа.

5. На рис. 29 изображены две канонические структуры; чтобы убедиться в их эквивалентности, достаточно найти их внешнюю модель в виде передаточной функции. По графовым моделям структур можно составить их внутренние модели:

$$\Sigma^{(3)}: \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -11 & -6 \end{pmatrix}; \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = (5 \quad 1 \quad 2);$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad C = (0 \quad 0 \quad 1),$$

а затем и внешние, которые имеют единственное представление:

$$W(s) = (2s^2 + s + 5) / (s^3 + 6s^2 + 11s + 4).$$

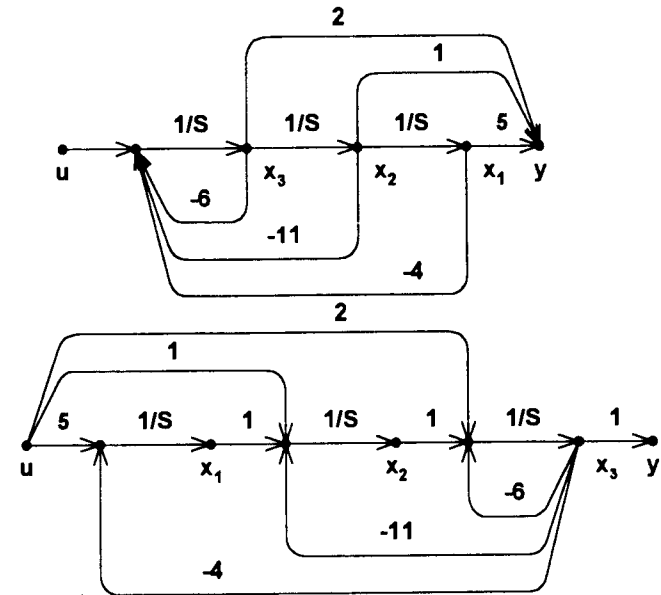


РИС. 29



## 2.7. УПРАЖНЕНИЯ

1. Записать матричные представления линейных моделей для систем из 2.2 — примеров 2, 3, 4. Изобразить структурные схемы этих моделей.

2. Составить внутреннюю модель движения системы, изображенной на рис. 30, а: колебание массы, закрепленной на жестком стержне, который удерживается в равновесии пружинной жесткости  $k_1$  и демпфером с линейной характеристикой  $k_2\dot{\varphi}$ .

3. Малые движения двух связанных пружинами маятников единичной массой, показанных на рис. 30, б, описываются линейными уравнениями:

$$\begin{aligned} \zeta'' + \omega^2 \zeta + v^2 (\zeta - \sigma) &= 0; \\ \sigma'' + \omega^2 \sigma - v^2 (\zeta - \sigma) &= 0; \\ \omega^2 = g/L; \quad v^2 = k\lambda/L, \end{aligned}$$

где  $L, \lambda$  — длина маятника и естественная длина пружины;  
 $k$  — жесткость пружины.

Ввести координаты состояния, положив  $x_1 = \zeta, x_2 = \dot{\zeta}, x_3 = \sigma, x_4 = \dot{\sigma}$ .

Составить матричную и структурную модели движения. Произвести линейную замену переменных:

$$\begin{aligned} z_1 = x_1 + x_3; \quad z_2 = x_2 + x_4; \\ z_3 = x_1 - x_3; \quad z_4 = x_2 - x_4. \end{aligned}$$

Составить матричную и структурную модели движения в новых переменных.

4.

а) Построить линеаризованную модель системы:

$$\begin{aligned} x_1' &= \exp(x_1 + x_2) - x_2; \\ x_2' &= -x_1 + x_1 x_2 \end{aligned}$$

в окрестности неподвижной точки  $x^0 = (-1 \ 1)^T$ ;

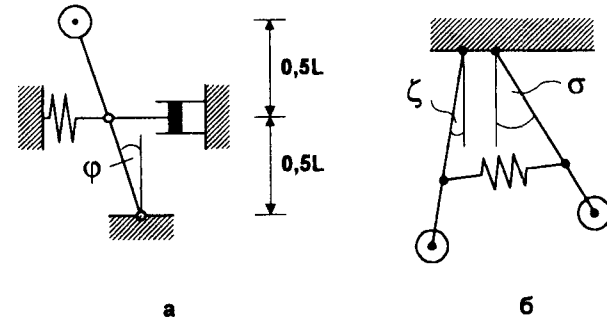


РИС. 30

б) выполнить в окрестности опорного движения  $(\omega^0, y^0)$  линеаризацию модели измерителя угловой частоты вращения вала турбины:

$$y'' + k_1 y' + k_2 y^3 = k_3 \omega,$$

где  $\omega$  — угловая частота вращения вала;  
 $y$  — выходной сигнал измерителя.

5. На рис. 31 изображена схема электромеханической системы управления положением стального шарика. Электромагнит развивает усилие, пропорциональное квадрату тока и обратно пропорциональное расстоянию до шарика. Состояние системы определяется тремя координатами: положением и скоростью перемещения шарика, током в обмотке электромагнита. Составить модель состояния системы, выполнить линеаризацию этой модели в окрестности некоторого положения шарика:

$$\begin{aligned} (x_1(0) = \alpha; \quad x_2(0) = 0; \quad x_3(0) = \\ = (mg \alpha)^{0.5 T} \end{aligned}$$

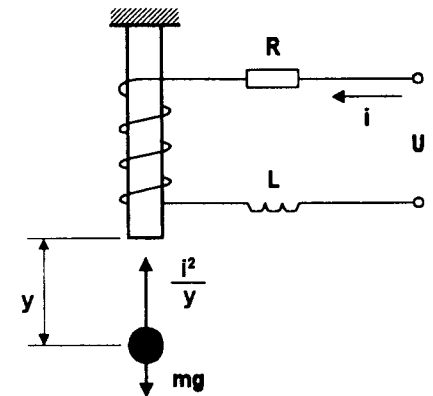


РИС. 31

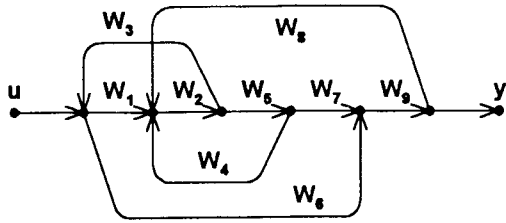


РИС. 32 а

6. Определить передаточную функцию системы, представленной в виде

а)

$$y''' + 6y'' + 11y' - 5y = u'' + 2u' + u;$$

б)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = (1 \quad -2)^T; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$$

в)

$$\begin{aligned} y''_1 + 5y'_1 - 5y_1 &= u'_1 + u_1 + 4u_2; \\ y'_2 + 2y_2 &= u_1 + u_2. \end{aligned}$$

7. Определить передаточную функцию системы, структурная схема которой представлена на рис. 32а.

8. Следящая система управления по азимуту радиотелескопом имеет структуру, изображенную на рис. 32б. Выход системы:  $\rho_1(t)$  — угол поворота основания телескопа;  $\rho_2(t)$  — угол поворота диска антенны. Вход:  $u(t)$  — задание; возмущение  $\mu(t)$  — момент сопротивления ветру. Промежуточные переменные:  $m_1$  — движущий момент привода;  $m_2$  — момент упругости опор;  $v$  — угловая частота вращения вала привода;  $W_K$  — передаточная функция корректирующего звена;  $k_1, k_2$  — коэффициент наклона внешней характеристики привода и упругость опор соответственно. Найти передаточные функции системы по заданию, по возмущению.

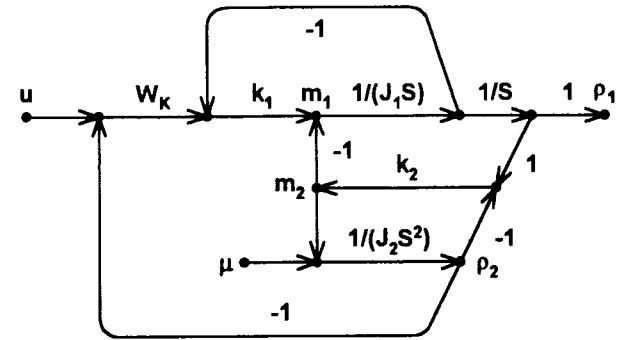


РИС. 32б

9. Для системы с передаточной функцией:

а)

$$H(s) = 12/(s^3 + 6s^2 + 5s - 12);$$

б)

$$H(s) = (s + 1)(s - 2)/(s^2 + s - 2)$$

получить эквивалентные внутренние модели в мультипликативной, аддитивной и нормальной формах. Построить структурные схемы этих моделей.

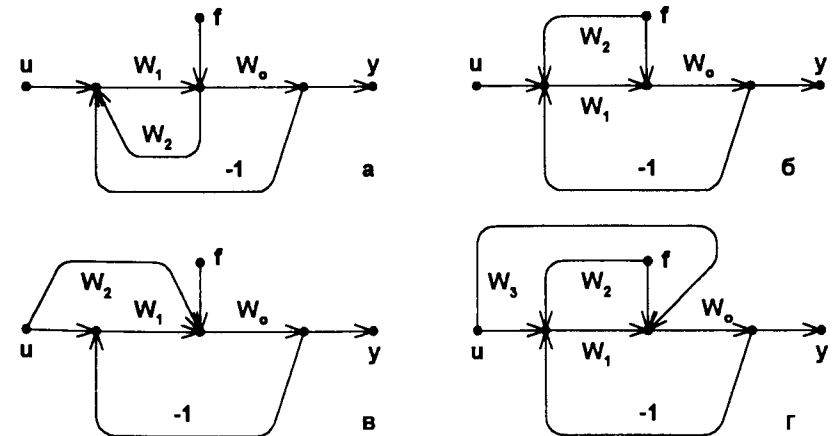


РИС. 33

10. На рис. 33 представлены четыре структуры автоматических систем воспроизведения входного задающего сигнала, построенных на основе канонической структуры, изображенной на рис. 22. В этих структурах неизменяемая часть имеет передаточную функцию  $W_0$ , остальные элементы — управляющие и корректирующие звенья. Записать для каждой структуры уравнение выхода и уравнение ошибки, найти условия безошибочного воспроизведения задания и условия компенсации возмущения.

## 3 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

---

---

*Примеры цифровых систем управления — Модели состояния линейной дискретной системы — Передаточные функции линейной дискретной системы — Взаимосвязь моделей — Модуляционная внешняя модель дискретной системы — Упражнения.*

### 3.1. ПРИМЕРЫ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Дискретные системы отличаются от непрерывных тем, что среди сигналов, действующих в системе, имеются так называемые **дискретные сигналы**. Дискретные сигналы получаются из непрерывных квантованием по уровню, по времени или одновременно и по уровню, и по времени. Сигналы, квантованные по уровню, имеют место в **релейных системах**, в **импульсных системах** имеются сигналы, квантованные по времени, **цифровыми** называют системы, в которых используются сигналы, квантованные и по времени, и по уровню. Системы, в структуре которых используются цифровые устройства, контроллеры, микропроцессоры, ЭВМ, очевидно, являются дискретными, ведь цифровой код — это сигнал, квантованный одновременно по времени и по уровню.

Примером цифровой системы является система управления шаговым двигателем, для позиционирования схвата руки робота. Шаговый двигатель поворачивает свой вал на угол, пропорциональный числу импульсов, которое в свою очередь отвечает коду угла позиционирования. Таким образом, структура системы содержит контроллер, преобразующее устройство "код — число импульсов", шаговый двигатель и в обратной связи — цифровой датчик положения.

Классическим примером дискретных автоматических систем являются системы, использующие в контуре управления цифровые регуляторы. Непрерывный сигнал рассогласования, поступающий на вход регулятора, преобразуется в последовательность импульсов, которые являются цифровым кодом сигнала ошибки. Эта последовательность импульсов преобразуется в соответствии с выбранным законом регулирования в другую последовательность импульсов, которые цифроаналоговым устройством преобразуются в выходной непрерывный сигнал регулятора.

Из рассмотренных в первой главе автоматических систем дискретными являются: система углового сопровождения радиотелескопа, система регулирования толщины стального проката, система управления движением манипуляционного робота, система автоматического слежения за целью.

## 3.2. МОДЕЛИ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

Математические модели дискретных систем управления описывают поведение этих систем только в квантованные моменты времени:  $t_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Дискретным представлением непрерывных сигналов  $u(t)$ ,  $y(t)$  и координат состояния  $x(t)$  являются последовательности:

$$\{u(t_k)\}; \{y(t_k)\}; \{x(t_k)\}.$$

Математические модели дискретных систем устанавливают взаимосвязь между этими последовательностями.

Дискретные автоматические системы управления содержат в своей структуре цифровую (дискретную) и аналоговую (непрерывную) части. Для согласования этих частей в системе используются цифроаналоговый и аналогово-цифровой преобразователи. Преобразователь "аналог — цифра" ставит в соответствие непрерывной функции  $f(t)$ ,  $t \geq t_0$  последовательность  $\{f(t_k), k = 0, 1, 2, \dots\}$ , называемую **решетчатой функцией**  $f^*(t)$ . Преобразователь "цифра—аналог" осуществляет преобразование последовательности  $\{f(t_k), k = 0, 1, 2, \dots\}$  в некоторую непрерывную функцию, которая является аппроксимацией исходной  $f(t)$ ,  $t \geq t_0$ . Часто используют кусочно-постоянную аппроксимацию,

поэтому такой преобразователь называют **экстраполятором**, или **фиксатором нулевого порядка**.

Построение дискретного представления непрерывной системы носит название процесса **дискретизации**, или **квантования**, непрерывной системы.

Пусть линейная непрерывная стационарная система порядка  $n$  представлена своей внутренней моделью:

$$\sum_n^{(n)}: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); & x(0); \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

Будем предполагать, что все переменные системы квантуются синхронно с постоянным шагом:  $\forall k, t_{k+1} - t_k = h$ , поэтому  $t_k = kh$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Будем считать эквивалентными обозначения:

$$x(t_k), x(kh), x(k), x_k.$$

Движение непрерывной системы из начального состояния  $x(t_k)$  на текущий момент  $t$  можно записать в общей форме Коши:

$$x(t) = \exp\{A(t - t_k)\} x(t_k) + \int_{t_k}^t \exp\{A(t - \tau)\} Bu(\tau) d\tau.$$

Поскольку преобразователь "цифра—аналог" — фиксатор нулевого порядка, то на любом интервале  $[t_k, t_{k+1})$  управление сохраняет свое значение  $u(k)$ . Поэтому

$$x(1) = e^{Ah} x(0) + \left( \int_0^h e^{A(h-\tau)} d\tau \right) Bu(0);$$

$$x(2) = e^{2Ah} x(0) + \left( \int_h^{2h} e^{A(2h-\tau)} d\tau \right) Bu(1); \dots$$

$$x(k+1) = e^{(k+1)Ah} x(k) + \left( \int_{kh}^{(k+1)h} e^{A((k+1)h-\tau)} d\tau \right) Bu(k).$$

Заметим, что все интегралы, стоящие в скобках, равны. Действительно, сделав в интеграле две последовательные замены:  $z = \tau - kh$  и  $h - z = \theta$ , получим

$$\int_{kh}^{(k+1)h} e^{A((k+1)h-\tau)} d\tau = \int_0^h e^{A(h-z)} dz = \int_0^h e^{A\theta} d\theta = \text{const.}$$

Обозначив

$$M = e^{Ah}; \quad N = \left( \int_0^h e^{A\theta} d\theta \right) B,$$

получим уравнения состояния системы в квантованные моменты времени — **дискретную внутреннюю модель** системы:

$$\sum_{\Delta}^{(n)}: \quad x(k+1) = Mx(k) + Nu(k); \quad x(0); \\ y(k) = Cx(k); \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Эта модель при известной входной последовательности  $\{u(k)\}$  позволяет, выполнив итерации, найти решение:

$$x(1) = Mx(0) + Nu(0); \\ x(2) = Mx(1) + Nu(1) = M^2x(0) + MNu(0) + Nu(1); \\ x(3) = Mx(2) + Nu(2) = \\ = M^3x(0) + M^2Nu(0) + MNu(1) + Nu(2), \dots \\ x(k) = M^k x(0) + M^{k-1} Nu(0) + M^{k-2} Nu(1) + \dots + Nu(k-1) = \\ = M^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} M^{k-1-i} Nu(i).$$

Матрицы дискретной модели системы  $M$ ,  $N$ ,  $C$  называются **матрицами состояния, входа и выхода** системы соответственно.

### Примеры

1. Непрерывная система имеет модель:

$$x'_1(t) = x_2(t); \quad x'_2(t) = u(t); \quad x(0); \\ y(t) = x_1(t).$$

Найдем матрицы дискретной модели этой системы. Известно (2.2), что экспоненциал матрицы можно найти, используя преобразование Лапласа:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}(sE - A)^{-1}.$$

В данном случае

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left( \begin{matrix} s & -1 \\ 0 & s \end{matrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$M = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad N = \int_0^h \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5h^2 \\ h \end{pmatrix}.$$

2. Составим дискретную модель непрерывной системы управления положением:

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} u(t), \quad x(0).$$

Экспоненциал матрицы состояния системы равен

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left( \begin{matrix} s & -1 \\ 0 & s + \alpha \end{matrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^{-1}(1 - e^{-\alpha t}) \\ 0 & e^{-\alpha t} \end{pmatrix},$$

поэтому

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^{-1}(1 - e^{-\alpha h}) \\ 0 & e^{-\alpha h} \end{pmatrix};$$

$$N = \int_0^h \begin{pmatrix} 1 & \alpha^{-1}(1 - e^{-\alpha\theta}) \\ 1 & e^{-\alpha\theta} \end{pmatrix} d\theta \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\alpha^{-1}(h - \alpha^{-1}(1 - e^{-\alpha h})) \\ (1 - e^{-\alpha h}) \end{pmatrix}.$$

Положив  $a = 5$ ,  $b = 0,8$ ,  $h = 0,1$ , получим

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0,00787 \\ 0 & 0,6065 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 0,00441 \\ 0,06296 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь непрерывная система представлена своей внешней моделью:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \dots + a_n y(t) = u(t).$$

При достаточно малом шаге квантования дискретизацию этой модели можно выполнить с необходимой точностью путем замены дифференциалов конечными разностями:

$$y'(t) = dy(t_k)/dt \approx \Delta y(t_k)/h = h^{-1} (y(t_{k+1}) - y(t_k));$$

$$y''(t) = d^2 y(t_k)/dt^2 \approx \Delta^2 y(t_k)/h^2 = h^{-1} (\Delta y(t_{k+1}) - \Delta y(t_k)) = h^{-2} (y(t_{k+2}) - 2y(t_{k+1}) + y(t_k)), \dots$$

**Дискретная внешняя модель** системы принимает конечно-разностный вид:

$$((a_0/h^n)\Delta^n + (a_1/h^{n-1})\Delta^{n-1} + (a_2/h^{n-2})\Delta^{n-2} + \dots + (a_{n-1}/h)\Delta + a_n)y(t_k) = u(t_k),$$

который после алгебраических преобразований приобретает рекуррентную форму:

$$\alpha_0 y(k+n) + \alpha_1 y(k+n-1) + \alpha_2 y(k+n-2) + \dots + \alpha_n y(k) = u(k),$$

где  $\alpha_j$  — коэффициенты модели.

Движение дискретной модели, представленной в разностном виде, складывается из двух движений: собственного и вынужденного под действием внешнего возмущения. Собственное движение — решение однородного разностного уравнения системы. Общий вид этого решения определяется как линейная форма от собственных чисел системы:

$$y(k) = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k + \dots + C_n \lambda_n^k,$$

где  $C_j$  — коэффициенты линейной формы, которые вычисляются через начальные состояния системы;

$\lambda_j$  — простые действительные корни характеристического уравнения системы;

$$\alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n = 0.$$

### Пример

Непрерывная система описывается дифференциальным уравнением:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u(t); \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0,5.$$

Выполним с шагом квантования  $h = 0,1$  разностную дискретизацию этого уравнения:

$$100(y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)) + 50(y(k+1) - y(k)) + 6y(k) = u(k).$$

После преобразований получим искомую дискретную модель в рекуррентном виде:

$$y(k+2) - 1,5y(k+1) + 0,56y(k) = 0,01u(k).$$

Собственное движение этой модели описывается уравнением  $y(k) = C_0 0,8^k + C_1 0,7^k$ , поскольку характеристическое уравнение системы  $\lambda^2 - 1,5\lambda + 0,56 = 0$  имеет корни:  $\lambda_1 = 0,8$  и  $\lambda_2 = 0,7$ .

Постоянные  $C_0, C_1$  найдем, используя координаты начального состояния системы:

$$y(0) = C_0 + C_1 = 1; \quad y(1) = C_0 0,8 + C_1 0,7.$$

Значение  $y(1)$  определим, используя первую разность:

$$y'(0) \approx 10(y(1) - y(0)) = 0,5,$$

откуда  $y(1) = 1,05$ .

Теперь  $C_0 = 3,5, C_1 = -2,5$ . Таким образом, свободное движение дискретной модели можно представить выражением  $y(k) = 3,5 \cdot 0,8^k - 2,5 \cdot 0,7^k$ .

Разностная внешняя модель дискретной системы может быть преобразована во внутреннюю матричную модель системы, если ввести координаты состояния системы. Например, по правилу Коши

$$y(k) = x_1(k);$$

$$y(k+1) = x_2(k) = x_1(k+1); \dots$$

$$y(k+n-1) = x_n(k) = x_{n-1}(k+1);$$

$$y(k+n) = \alpha_0^{-1}(-\alpha_1 x_n(k) - \alpha_2 x_{n-1}(k) - \dots - \alpha_n x_1(k) + u(k)) = x_n(k+1).$$

Теперь внутренняя дискретная модель принимает вид

$$x_1(k+1) = x_2(k);$$

$$x_2(k+1) = x_3(k); \dots$$

$$x_{n-1}(k+1) = x_n(k);$$

$$x_n(k+1) = \alpha_0^{-1}(-\alpha_n x_1(k) - \alpha_{n-1} x_2(k) - \dots - \alpha_1 x_n(k) + u(k)),$$

а ее матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_n/\alpha_0 & -\alpha_{n-1}/\alpha_0 & \dots & -\alpha_1/\alpha_0 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1/\alpha_0 \end{pmatrix}; \quad C = (1 \ 0 \ \dots \ 0).$$

### 3.3. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

Дискретным аналогом оператора  $D = d/dt$  дифференцирования Коши непрерывных функций является **оператор  $R$  сдвига вперед**, который определяется следующим соотношением:

$$Rf(k) = f(k+1).$$

Инверсией оператора сдвига вперед является **оператор  $R^{-1}$  сдвига назад**:

$$R^{-1}f(k+1) = f(k).$$

Оператор сдвига назад является дискретным аналогом оператора интегрирования.

Оператор сдвига позволяет упростить аналитическую работу с разностными моделями дискретной системы. Используя понятие оператора сдвига, можно ввести новое понятие: **дискретная операторная передаточная функция**. Действительно, пусть модель дискретной системы с одним входом и одним выходом представлена разностным уравнением общего вида:

$$y(k+n) + \alpha_1 y(k+n-1) + \dots + \alpha_n y(k) = \beta_0 u(k+m) + \beta_1 u(k+m-1) + \dots + \beta_m u(k).$$

Запишем это уравнение в операторной форме:

$$(R^n + \alpha_1 R^{n-1} + \dots + \alpha_n R)y(k) = (\beta_0 R^m + \beta_1 R^{m-1} + \dots + \beta_m R)u(k).$$

Обозначим многочлены:

$$R^n + \alpha_1 R^{n-1} + \dots + \alpha_n R = F_n(R);$$

$$\beta_0 R^m + \beta_1 R^{m-1} + \dots + \beta_m R = G_m(R)$$

и их отношение:

$$G_m(R)/F_n(R) = H(R).$$

Теперь модель дискретной системы имеет более простой вид:

$$F_n(R)y(k) = G_m(R)u(k),$$

или

$$y(k) = H(R)u(k).$$

Выражение  $H(R)$  называют **дискретной операторной передаточной функцией** системы.

Пусть теперь дискретная система имеет векторный вход и векторный выход и описывается матричной моделью состояний:

$$x(k+1) = Mx(k) + Nu(k); \quad x(0);$$

$$y(k) = Cx(k).$$

Применив к этой модели оператор сдвига, получим:

$$x(k) = (RE - M)^{-1}Nu(k);$$

$$y(k) = C(RE - M)^{-1}Nu(k).$$

Теперь выражение  $C(RE - M)^{-1}N$  приобретает смысл **матричной дискретной операторной передаточной функции** системы

$$H(R) = C(RE - M)^{-1}N.$$

### Пример

Дискретное представление непрерывной модели

$$x_1'(t) = x_2(t); \quad x_2'(t) = u(t); \quad x(0);$$

$$y(t) = x_1(t)$$

имеет вид

$$x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k) + 0,5h^2u(k);$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + hu(k),$$

поэтому дискретная операторная передаточная функция:

$$H(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R-1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R-1 & h \\ 0 & R-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5h^2 \\ h \end{pmatrix} = 0,5h^2(R+1)/(R-1)^2.$$

Дискретная операторная передаточная функция является внешней моделью системы, она определяет отношение "вход-

выход" системы и поэтому не должна быть зависимой от выбора внутренних координат состояния. Покажем справедливость этого утверждения.

Пусть изначально система имеет вектор состояния  $x$  и определяется тройкой матриц:  $M$ ,  $N$ ,  $C$  и дискретная операторная передаточная функция системы равна  $H_x(R) = C(RE - M)^{-1}N$ . Пусть над вектором состояния  $x$  выполнено невырожденное преобразование с матрицей  $T$ . В новых координатах состояния  $z = Tx$  система задается матрицами  $TMT^{-1}$ ,  $TN$ ,  $CT^{-1}$ . Найдем дискретную операторную передаточную функцию, соответствующую этим матрицам:

$$H_z(R) = CT^{-1}(RE - TMT^{-1})^{-1}TN.$$

Выполним в этом выражении преобразования:

$$\begin{aligned} H_z(R) &= CT^{-1}(RTT^{-1} - TMT^{-1})^{-1}TN = \\ &= CT^{-1}(T(RE - M)T^{-1})^{-1}TN = \\ &= CT^{-1}T(RE - M)^{-1}T^{-1}TN = H_x(R). \end{aligned}$$

Действительно, дискретная операторная передаточная функция системы не зависит от выбора координат состояния и поэтому является **инвариантом системы**.

Основной аналитический аппарат исследования разностных моделей — так называемое **Z-преобразование**, которое является дискретным аналогом преобразования Лапласа. Определение и свойства Z-преобразования можно найти в приложении 16.2.

Применим Z-преобразование к внутренней модели дискретной системы:

$$\begin{aligned} z(X(z) - x(0)) &= MX(z) + NU(z); \\ Y(z) &= CX(z), \end{aligned}$$

где  $X(z) = \mathbf{Z}[x(k)];$

$$Y(z) = \mathbf{Z}[y(k)];$$

$$U(z) = \mathbf{Z}[u(k)] \text{ — Z-преобразования соответствующих функций.}$$



Получаем выражения для преобразованного вектора состояния и вектора выхода системы — дискретные аналоги формулы Коши движения непрерывной системы:

$$X(z) = (zE - M)^{-1}(zx(0) + NU(z));$$

$$Y(z) = C(zE - M)^{-1}zx(0) + C(zE - M)^{-1}NU(z).$$

Теперь аналогично тому, как это делалось в непрерывных системах, введем понятие передаточной функции. Положим, что дискретная система в начальный момент была в покое:  $x(0) = 0$ , тогда

$$Y(z) = C(zE - M)^{-1}NU(z),$$

поэтому выражение

$$C(zE - M)^{-1}N = H(z)$$

приобретает смысл **передаточной функции дискретной системы**.

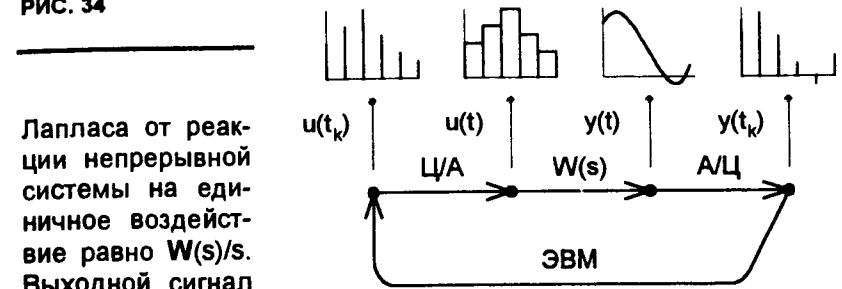
Отметим очевидную связь между понятиями дискретной операторной передаточной функции и передаточной функции дискретной системы. После формальной замены оператора  $R$  на комплексную переменную  $z$  получаем выражение для передаточной функции дискретной системы.

### 3.4. ВЗАИМОСВЯЗЬ МОДЕЛЕЙ

Структурная модель дискретной системы, представленная на рис. 34, содержит непрерывную часть, которая может быть задана в виде передаточной функции  $W(s)$  или тройкой матриц  $A, B, C$ . Моделями дискретной системы являются передаточная функция  $W(z)$  или тройка матриц  $M, N, C$ . Почти все взаимосвязи между этими моделями установлены, осталось найти связь между внешними моделями непрерывной и дискретной систем.

Пусть на вход непрерывной системы поступает единственный ступенчатый сигнал, но чтобы это обеспечить, необходимо на вход преобразователя "цифра-аналог" подавать импульсную последовательность  $\{u(kh) = 1, k = 0, 1, \dots\}$ .  $Z$ -преобразование этой последовательности (16.2) равно  $z/(z - 1)$ . Преобразование

РИС. 34



Лапласа от реакции непрерывной системы на единичное воздействие равно  $W(s)/s$ . Выходной сигнал непрерывной системы проходит через идеальный квантователь и превращается в импульсную последовательность  $\{y(kh) = 1, k = 0, 1, \dots\}$ , которая является, таким образом, реакцией на входное единичное дискретное воздействие  $\{u(kh) = 1, k = 0, 1, \dots\}$ . Обозначим  $Z$ -преобразование этой реакции  $Y(z)$ . Ясно, что

$$Y(z) = Z[y(kh)] = Z[y(t): t = t_k] =$$

$$= Z[\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]] = Z[\mathcal{L}^{-1}[W(s)/s]].$$

С другой стороны,  $Y(z) = W(z)/(z - 1)^{-1}$ , значит, искомая передаточная функция дискретной системы может быть найдена из выражения

$$W(z) = (1 - z^{-1}) Z[\mathcal{L}^{-1}[W(s)/s]].$$

Рассмотрим еще одну взаимосвязь моделей. Характеристические числа непрерывной части системы, задаваемой матрицами  $A, B, C$ , являются собственными числами матрицы  $A$ :  $\lambda_i(A)$ . Характеристические числа дискретной системы, задаваемой матрицами  $M, N, C$ , являются собственными числами матрицы  $M$ :  $\lambda_i(M)$ .

$$\text{Но } M = \exp(Ah),$$

поэтому

$$\lambda_i(M) = \exp(\lambda_i(A)h).$$

Конформное преобразование  $z = e^{sh}$  осуществляет отображение полюсов непрерывной системы из комплексной

S-плоскости в полюса дискретной системы на комплексную Z-плоскость. Комплексная функция  $z = e^{sh}$  является  $2\pi j/h$  периодической, она отображает каждую бесконечную левую полуплоску S-плоскости шириной  $2\pi/h$  во внутренность единичного круга Z-плоскости. Так, для полосы  $-\pi/h \leq \text{Im } s \leq \pi/h$  действительная левая полуось переходит в отрезок (0, 1), границы полосы переходят в отрезок (-1, 0), отрезок мнимой оси  $(-j\pi/h, j\pi/h)$  переходит в окружность  $|z| = 1$ .

Таким образом, процесс дискретизации непрерывной системы осуществляет отображение левой комплексной S-полуплоскости во внутренность единичного круга комплексной Z-плоскости.

### Примеры

1. Передаточная функцию разомкнутой дискретной системы, содержащей последовательно соединенные идеальный квантователь с периодом квантования 0,5 с, восстановитель нулевого порядка и непрерывное звено с передаточной функцией  $W(s) = 5/(s(s + 2))$ , может быть найдена из основного выражения:

$$W(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}^{-1} [W(s)/s] = (0,46z + 0,33)/((z - 1)(z - 0,368)).$$

2. Внешняя модель дискретной системы, представленная рекуррентным уравнением

$$y(k + 2) + 0,5y(k + 1) + 0,2y(k) = u(k + 1) - 0,4u(k),$$

может быть представлена и в виде передаточной функции.

$$W(z) = (z - 0,4)/(z^2 + 0,5z + 0,2).$$

## 3.5. МОДУЛЯЦИОННАЯ ВНЕШНЯЯ МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

Структурная схема дискретной модели, изображенная на рис. 34, позволяет создавать два типа внешних моделей: в первом случае предполагается, что входным и выходным сигналами системы являются дискретные сигналы и для этого мысленный

разрыв выполняется в цифровой части между АЦ и ЦА преобразователями, во втором случае мысленный разрыв выполняется в аналоговой части между объектом и АЦ-преобразователем, поэтому входной и выходной сигналы системы оказываются непрерывными.

Первый тип дискретного представления внешних моделей изучен в 3.3. Структура второго типа внешних моделей дискретной системы содержит последовательно соединенные квантователь (АЦП), компьютер и цепь восстановления (ЦАП), которые выполняют функции амплитудного модулятора. Входной непрерывный сигнал, пройдя через квантователь, модулируется последовательностью прямоугольных импульсов, далее этот сигнал, обработанный в компьютере, вновь превращается в аналоговый на выходе. Используем эту идеализацию для построения внешней модуляционной модели дискретной системы.

Будем называть **дискретным представлением**, или **решетчатой функцией**  $f^*(t)$  непрерывного сигнала  $f(t)$ , выражение

$$f^*(t) = f(t) \sum_{k \geq 0} \delta(t - kh) = \sum_{k \geq 0} f(kh) \delta(t - kh).$$

Определим преобразование Лапласа решетчатой функции и отметим два важных свойства этого преобразования [10]:

$$F^*(s) = \mathcal{L} [f^*(t)] = \sum_{k \geq 0} f(kh) \mathcal{L} [\delta(t - kh)] = \sum_{k \geq 0} f(kh) e^{-skh}.$$

Первое свойство устанавливает связь между тремя преобразованиями непрерывной функции  $f(t)$ : преобразованием Лапласа  $F(s)$ , Z-преобразованием  $F(z)$  и преобразованием Лапласа ее решетчатой функции  $F^*(s)$ :

$$F^*(s) = F(z = e^{sh}) = h^{-1} \sum_{k \geq 0} F(s + jk\omega_q),$$

где  $\omega_q = 2\pi/h$  — частота квантования.

Второе свойство решетчатой функции состоит в том, что  $F^*(s)$  является периодической функцией с периодом  $j\omega_q$ .

Действительно,

$$F^*(s + jm\omega_q) = \sum_{k \geq 0} f(kh) \exp\{-(s + jm\omega_q)kh\} =$$

$$= \sum_{k \geq 0} f(kh) e^{-skh} \exp\{-jm\omega_q kh\} = \sum_{k \geq 0} f(kh) e^{-sk} = F^*(s),$$

потому что  $\exp\{-jm\omega_q kh\} = \exp\{-j2\pi mk\} = 1$  для целых  $m, k$ .

Идеальный квантователь выполняет операцию модуляции несущего сигнала  $u(t)$  периодическим сигналом, состоящим из идеальных импульсов  $\delta(t)$ , поэтому если на вход идеальному квантователю поступает сигнал  $u(t)$ , то на выходе будет решетчатая функция этого сигнала. Восстанавливающая цепь предназначена для кусочно-линейной экстраполяции между импульсами и поэтому ее можно представить как схему "выборки—хранения", например в виде интегратора со сбросом в момент квантования.

Определим внешнюю модель системы, содержащей последовательно соединенные идеальный квантователь, фиксатор нулевого порядка и непрерывную часть (рис. 35). Для этого найдем преобразование Лапласа реакции этой системы на произвольный входной сигнал  $u(t)$ .

Пусть преобразование Лапласа решетчатой функции входного сигнала  $U^*(s)$ . Передаточную функцию  $W_\Phi(s)$  фиксатора нулевого порядка — интегратора со сбросом найдем как преобразование Лапласа реакции этого элемента на единичный импульс. Искомая реакция представляет собой прямоугольный импульс единичной высоты и ширины  $h$ , который можно представить в виде разности двух единичных ступенчатых сигналов. Поэтому

$$W_\Phi(s) = \mathcal{L}[1(t) - 1(t-h)] = (1 - e^{-sh})/s.$$

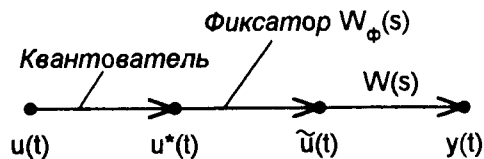


РИС. 35

Теперь может быть найдено преобразование Лапласа выходного сигнала системы:

$$Y(s) = W_\Phi(s) W(s) U^*(s) =$$

$$= (1 - e^{-sh}) s^{-1} W(s) \sum_{k \geq 0} u(kh) e^{-skh}.$$

Обозначим для дальнейшего:

$$G(s) = W_\Phi(s) W(s).$$

Данное выражение не содержит преобразования входа и поэтому не может быть использовано для определения передаточной функции системы. Однако если на выходе системы ввести фиктивный квантователь, как показано на рис. 36, то для новой структуры передаточная функция уже определяется.

Действительно, найдем преобразование Лапласа решетчатой функции выхода системы:

$$Y^*(s) = [G(s) U^*(s)]^*.$$

Согласно первому свойству решетчатых функций

$$Y^*(s) = h^{-1} \sum_{k \geq 0} Y(s + jk\omega_q) =$$

$$= h^{-1} \sum_{k \geq 0} G(s + jk\omega_q) U^*(s + jk\omega_q).$$

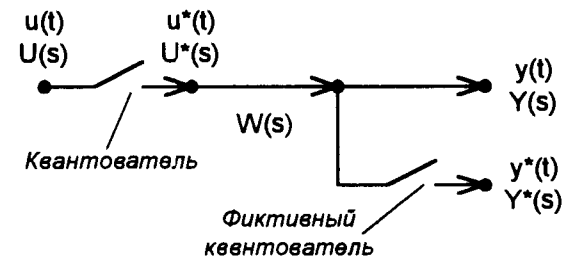


РИС. 36

По свойству периодичности преобразований решетчатых функций  $U^*(s + jk\omega_q) = U^*(s)$  имеем

$$Y^*(s) = U^*(s) \left[ h^{-1} \sum_{k \geq 0} G(s + jk\omega_q) \right].$$

Выражение, стоящее в прямых скобках, согласно первому свойству решетчатых функций следует обозначить через  $G^*(s)$ . При этом получаем искомую внешнюю модель — передаточную функцию дискретной системы с непрерывным входом и непрерывным выходом:

$$Y^*(s) = G^*(s)U^*(s).$$

Теперь если на основании первого свойства решетчатых функций перейти в этом выражении к переменной  $z = e^{sh}$ , то получим уже известную внешнюю модель — передаточную функцию дискретной системы с дискретным входом и дискретным выходом:

$$Y(z) = G(z)U(z).$$

Построим алгоритм вычисления передаточной функции, для чего вычислим все составляющие выражения  $Y^*(s)$ :

$$Y^*(s) = G^*(s)U^*(s) = \sum_{k \geq 0} y(kh) e^{-skh}.$$

Реакция линейной системы с передаточной функцией  $G(s)$  и импульсной характеристикой  $g(t)$  на дискретный входной сигнал  $u^*(t)$  определяется по формуле

$$y(t) = \sum_{n \geq 0} u(nh) g((t - n)h),$$

или в дискретном представлении

$$y(kh) = \sum_{n \geq 0} u(nh) g((k - n)h).$$

Подставим это представление в выражение

$$Y^*(s) = \sum_{k \geq 0} y(kh) e^{-skh},$$

получим

$$Y^*(s) = \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} u(nh) g((k - n)h) e^{-skh}.$$

Сделаем замену переменных  $m = k - n$ :

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} u(nh) g(mh) e^{-s(m+n)h} = \\ &= \sum_{m \geq 0} g(mh) e^{-smh} \sum_{n \geq 0} u(nh) e^{-snh} = \\ &= \left[ \sum_{m \geq 0} g(mh) e^{-smh} \right] U^*(s). \end{aligned}$$

Последнее означает, что выражение, стоящее в прямых скобках, есть дискретная передаточная функция:

$$G^*(s) = \sum_{m \geq 0} g(mh) e^{-smh}.$$

Теперь на основании второго свойства решетчатой функции получаем искомую внешнюю модель системы в виде передаточной функции по  $z$ -переменной:

$$G(z) = \sum_{m \geq 0} g(mh) z^{-m} = \mathcal{Z}[g(mh)].$$

Мы получили, что  $Z$ -преобразование импульсной характеристики системы совпадает с передаточной функцией системы. Этот результат имеет прямую аналогию в теории непрерывных систем. Кроме того, найден алгоритм вычисления передаточной функции дискретизированной системы через передаточную функцию непрерывной системы:

$$G(z) = \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[G(s)]],$$

что совпадает с ранее полученным результатом.

## Примеры

1. Пусть на вход фиксатора нулевого порядка поступает экспоненциальный сигнал, решетчатая функция которого равна

$$u^*(t) = e^{-\alpha t} \sum_{k \geq 0} \delta(t - kh).$$

Преобразуем по Лапласу эту функцию:

$$U^*(s) = e^{sh} / (e^{sh} - e^{-\alpha h}).$$

Преобразование Лапласа выходного сигнала фиксатора равно

$$W_{\phi}(s) U^*(s) = (1 - e^{-sh}) e^{sh} / (s(e^{sh} - e^{-\alpha h})).$$

2. Пусть непрерывная часть системы имеет передаточную функцию инерционного звена  $W(s) = k/(s + a)$ . Перед звеном и после него стоит идеальный квантователь. Найдем дискретную передаточную функцию такого соединения.

Инерционное звено имеет импульсную характеристику  $g(t) = ke^{-at}$ . Выполнив подстановку  $t = mh$ , получим  $g(mh) = ke^{-amh}$ . Теперь искомая дискретная передаточная функция принимает вид

$$W(z) = Z[g(mh)] = \sum_{m \geq 0} g(mh) z^{-m} = k \sum_{m \geq 0} (e^{-ah} z)^{-m}.$$

Выражение, стоящее под знаком суммы, есть общий член убывающей геометрической прогрессии, поэтому эта сумма может быть вычислена по формуле

$$W(z) = k/(1 - (e^{-ah} z)^{-1}) = kz/(z - e^{-ah}) = k/(1 - a_1 z^{-1}),$$

где  $a_1 = e^{-ah}$ .

3. Пусть непрерывная часть системы имеет передаточную функцию инерционного звена. Перед звеном стоит идеальный

квантователь и восстановитель нулевого порядка, после звена — идеальный квантователь.

Дискретную передаточную функцию такого соединения можно найти, используя выражение

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[G(s)/s]] = \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[k/(s(s + a))]]. \end{aligned}$$

однако существуют таблицы [9] соответствующих Z-преобразований и преобразований Лапласа, которые позволяют находить  $\mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[W(s)]]$  сразу по виду  $W(s)$ .

В данном случае

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[k/(s(s + a))]] = \\ &= (1 - z^{-1}) k(1 - e^{-ah})z / (a(z - 1)(z - e^{-ah})) = \\ &= k(1 - e^{-ah}) / (a(z - e^{-ah})) = k_1 z^{-1} / (1 - a_1 z^{-1}), \end{aligned}$$

где  $k_1 = k(1 - e^{-ah})/a$ ;  
 $a_1 = e^{-ah}$ .

## 3.6. УПРАЖНЕНИЯ

1. Осуществить дискретизацию непрерывной системы:

а)

$$x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = u(t);$$

$$x(0) = 1; \quad x'(0) = 0,2;$$

б)

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t);$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

в)

$$W(s) = 1/(s^2 + 1,5s + 0,5).$$

Шаг квантования принять равным 0,1. Найти решение переходного уравнения.

2. Определить дискретную передаточную функцию для системы:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t);$$

$$y(t) = (1 \ 0)\mathbf{x}.$$

Шаг квантования принять равным 0,1. Найти импульсную переходную характеристику.

3. Найти импульсную переходную характеристику дискретной системы, которая описывается разностными уравнениями:

а)

$$y(k+1) + 2,4y(k) = 18u(k);$$

б)

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 0,52 & 1 \\ 0 & -0,38 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} u(k);$$

$$y(k) = (1 \ 2)\mathbf{x}(k).$$

Найти нули и полюса этой дискретной системы.

4. Найти дискретную передаточную функцию системы с непрерывной частью:

а)

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} u(t);$$

$$y(t) = (1 \ 0)\mathbf{x};$$

б)

$$W(s) = 2/((s+1)(s+2)),$$

если на входе непрерывной части используется экстраполятор нулевого порядка.

5. Дискретная система имеет непрерывную часть, модель которой задается матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = (1 \ 0).$$

Выполнить дискретизацию непрерывной части с шагом 0,5 и найти дискретную передаточную функцию системы. Найти передаточную функцию непрерывной части и по ней найти передаточную функцию дискретной системы, содержащей идеальный квантователь и восстановитель нулевого порядка перед непрерывной частью и фиктивный квантователь после непрерывной части. Сравнить результаты.

6. Непрерывная часть системы содержит звено запаздывания, ее передаточная функция  $e^{-st}/(s+a)$ . Система квантуется с шагом: а) 0,1; б) 1,0. Найти дискретную передаточную функцию системы.

7. Показать, что Z-преобразование выходного сигнала дважды интегрирующего звена равно

$$0,5h^2 z(z+1)/(z-1)^3.$$

8. Построить внутреннюю модель дискретной системы, представленной своей внешней моделью, в виде разностного уравнения

$$y(k+3) + 8y(k+2) + 12y(k+1) + 10y(k) = 2u(k).$$

Изобразить структурную модель системы.

9. Вычислить импульсную переходную функцию дискретной системы, у которой известно:

а)

$$G(z) = (0,2z + 0,074)/(z^2 - 0,503z + 0,0497);$$

б)

$$M = \begin{pmatrix} -0,6 & 1 \\ -0,32 & 0 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 0,21 \\ -0,16 \end{pmatrix}; \quad C = (1 \ 0).$$

Составить характеристическое уравнение и найти собственные числа этих дискретных систем.

10. Изучить свойства Z-преобразования. Вычислить Z-преобразования простейших непрерывных функций. Найти для них решетчатые функции. Определить преобразования Лапласа этих решетчатых функций. Исследовать связь между преобразованиями этих функций.

## 4 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

---

---

*Примеры нелинейных систем управления — Математические модели нелинейных систем — Топологические методы анализа нелинейных систем — Линейные представления нелинейной модели системы — Упражнения.*

### 4.1. ПРИМЕРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Все реальные системы управления нелинейны! Линейные модели систем являются идеализациями реальных систем. Когда линейная модель довольно точно описывает динамику процессов и нет смысла учитывать малые нелинейные особенности движения, тогда говорят о линеаризуемой нелинейной модели системы или просто о линейной системе. Однако существует обширный класс систем, динамика движения которых в общем случае не может быть описана линейными моделями без существенного изменения качества движения системы. Такие системы и их математические модели называют нелинейными.

Основная проблема анализа нелинейных систем состоит в том, что не существует универсального метода решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движение системы. Для линейных моделей такой универсальный метод есть.

Для линейных систем справедлив *принцип суперпозиции*, который позволяет исследовать эти системы парциально. Для нелинейных систем так делать нельзя. В самом деле, для линейной системы сумма двух движений является движением этой системы и всякое движение, умноженное на постоянную, вновь является движением этой системы. Поэтому, зная поведение линейной системы в малой окрестности начала координат, можно узнать поведение системы всюду в пространстве состоя-

ний. Фазовый портрет линейной системы в этом смысле однороден во всем пространстве состояний. Свойства движений нелинейной системы в общем случае являются локальными и не распространяются на все пространство состояний, в этом смысле фазовый портрет нелинейной системы оказывается неоднородным. Поэтому устойчивость нелинейной системы зависит не только от параметров системы, но и от начальных условий и возмущений, тогда как устойчивость линейной системы зависит только от параметров системы.

Линейная система имеет одну особую точку, устойчивую или неустойчивую; нелинейная система может иметь более чем одну особую точку. Нелинейные системы могут иметь конечное, счетное или континуальное множество особых точек.

Если линейная система имеет периодическое движение, то для нее существует замкнутая фазовая траектория в пространстве состояний и эта траектория не может быть изолированной, так как любое движение, умноженное на постоянную, тоже является движением. Для нелинейных систем могут существовать изолированные замкнутые траектории, которым отвечают в общем случае негармонические колебания.

В нелинейной системе в отличие от линейной возможна скачкообразная реакция на плавное изменение внешних условий, допустимы нарушения непрерывности амплитуды и частоты, возможны бифуркации и другие особенности движений.

## 4.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Основной *математической моделью нелинейной системы* является матричное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = F(x; t), \quad x(0),$$

где  $x(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  — вектор состояния системы;  
 $t$  — параметр, например текущее время.

Может оказаться, что вектор функция  $F$  не зависит явно от времени, а зависит только от состояния, такие системы называют *автономными*:

$$\dot{x}' = F(x), \quad x(0).$$

Математической *моделью движения управляемой нелинейной системы* является уравнение

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= F(x, u), \quad x(0); \\ u &= G(x, u), \end{aligned}$$

где  $u = (u_1, u_2, \dots, u_s)^T$  — вектор управления системы;  
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)^T$  — вектор выхода системы.

Решение нелинейного дифференциального уравнения — модели движения нелинейной системы определяет траекторию в пространстве состояния, называемую *фазовой траекторией*, или *фазовым движением*, системы.

Фазовая траектория движения системы начинается в момент  $t = 0$  из начальной точки  $x(0)$ , и каждому моменту времени  $t \geq 0$  отвечает точка  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ , таким образом, вдоль фазовой траектории определено *направление движения*. Совокупность всех фазовых траекторий образует *фазовый портрет системы*.

Определенная таким образом модель носит название *внутренней модели системы*.

### Примеры

1. На рис. 37, а, б изображены семейства интегральных кривых моделей нелинейных систем первого порядка:

а)

$$\dot{x}' = -t/x;$$

б)

$$\dot{x}' = 0,5(x^2 - 1),$$

на рис. 37, в — фазовый портрет нелинейной системы второго порядка:

$$\dot{x}'_1 = x_2^2; \quad \dot{x}'_2 = x_1.$$

2. Движение математического маятника массой  $m$ , который раскачивается в пустоте без трения на подвесе длиной  $l$ , описывается нелинейным уравнением:

$$ml\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi = 0, \quad \dot{\varphi}(0), \quad \varphi(0).$$



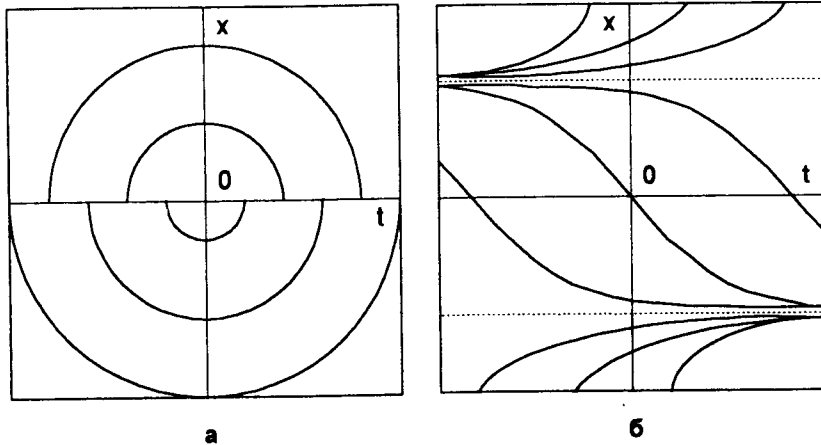


РИС. 37

Здесь  $\varphi(t)$  — текущий угол отклонения маятника от вертикали. Полагая  $\omega^2 = g/l$ , получим

$$\varphi'' + \omega^2 \sin \varphi = 0,$$

или в матричной форме:

$$x'_1 = x_2;$$

$$x'_2 = -\omega^2 \sin x_1, \quad x_1(0), \quad x_2(0),$$

где  $x_1(t) = \varphi(t); \quad x_2(t) = \varphi'(t)$ .

Если угол отклонения всегда достаточно мал, модель движения такого маятника может быть линейной:

$$\varphi'' + \omega^2 \varphi = 0.$$

На рис. 38 изображен фазовый портрет нелинейного математического маятника.

3. Движение математического маятника, который испытывает сопротивление раскачиванию, описывается нелинейным уравнением:

$$\varphi'' + \zeta \varphi' + \omega^2 \varphi = 0, \quad \zeta > 0.$$

На рис. 39, а, б изображены фазовые портреты такого нелинейного маятника для  $\zeta_1$  и  $\zeta_2 > \zeta_1$  соответственно.

4. Осциллятор релаксационных колебаний описывается нелинейным уравнением Ван-дер-Поля:

$$\varphi'' + (\varphi^2 - 1)\varphi' + \varphi = 0,$$

которое в матричном представлении имеет вид

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2; \\ x'_2 &= (1 - x_1^2)x_2 - x_1, \\ &x_1(0), \quad x_2(0). \end{aligned}$$

Фазовый портрет этой системы представлен на рис. 40.

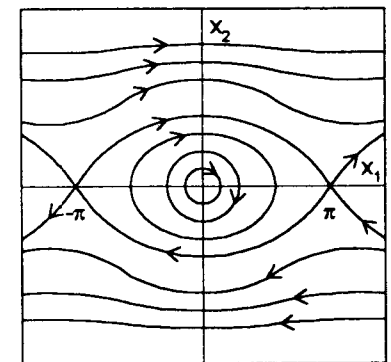
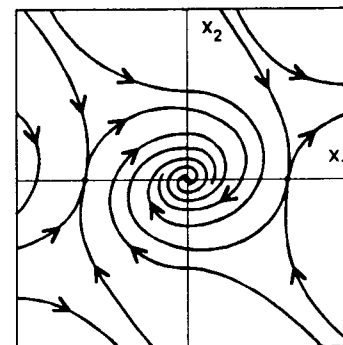
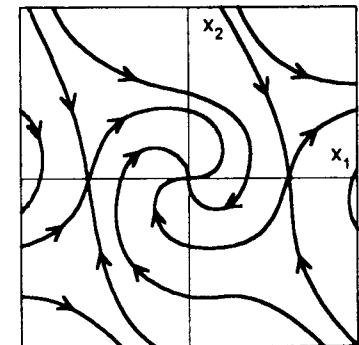


РИС. 38

РИС. 39



а



б

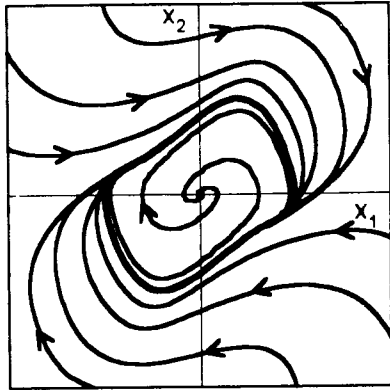


РИС. 40

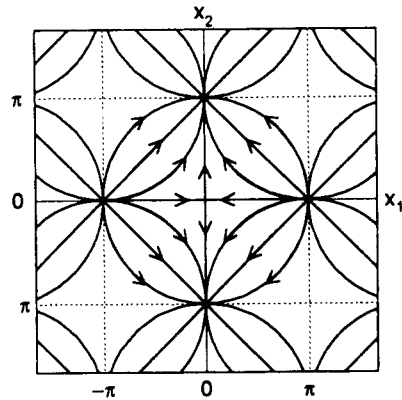


РИС. 41

5. На рис. 41 представлен фазовый портрет модели нелинейной системы:

$$\begin{aligned} x_1' &= \sin x_1; \\ x_2' &= -\sin x_2. \end{aligned}$$

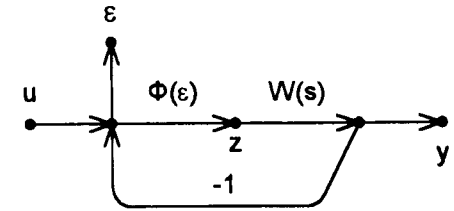
**Внешняя математическая модель**, или **модель типа "вход – выход"**, нелинейной автоматической системы представляется канонической структурой, изображенной на рис. 42, и содержит описание нелинейного звена  $z = \Phi(\varepsilon)$  и внешнюю модель  $W(s)$  — передаточную функцию линейной части системы. Выходной сигнал такой системы можно найти в явном виде:

$$y(t) = \int_0^t k(t - \tau) \Phi(\varepsilon(\tau)) d\tau; \quad \varepsilon(t) = u(t) - y(t),$$

где  $k(t)$  — импульсная функция линейной части нелинейной системы.

Нелинейные элементы в структуре автоматической системы — это различные звенья с нелинейными характеристиками

РИС. 42



"вход – выход", например механические соединения, имеющие зазоры, упоры, люфты; реле и переключатели; усилители с насыщением; магнитные, электрогидравлические и пневматические устройства с характеристиками, обладающими гистерезисом; чувствительные элементы и датчики; нелинейные функциональные преобразователи.

Рассмотрим идеальные нелинейные характеристики, которые используются для описания реальных характеристик нелинейных элементов систем управления:

- характеристика идеального реле (рис. 43, а)

$$\Phi(\varepsilon; \Phi_0) = \Phi_0 \operatorname{sgn} \varepsilon,$$

$$\text{где } \operatorname{sgn} \varepsilon = \begin{cases} -1, & \varepsilon < 0; \\ 1, & \varepsilon \geq 0; \end{cases}$$

- характеристика насыщения (рис. 43, б)

$$\Phi(\varepsilon; \lambda, \Phi_0) = \Phi_0 \operatorname{sat} (\varepsilon/\lambda),$$

$$\text{где } \operatorname{sat} \varepsilon = \begin{cases} -1, & |\varepsilon| < 1; \\ \operatorname{sgn} \varepsilon, & |\varepsilon| \geq 1; \end{cases}$$

- характеристика нечувствительности (рис. 43, в)

$$\Phi(\varepsilon; \lambda, k) = k \operatorname{dez}(\varepsilon/\lambda),$$

$$\text{где } \operatorname{dez} \varepsilon = \begin{cases} 0, & |\varepsilon| < 1; \\ (\varepsilon - \operatorname{sgn} \varepsilon), & |\varepsilon| \geq 1; \end{cases}$$

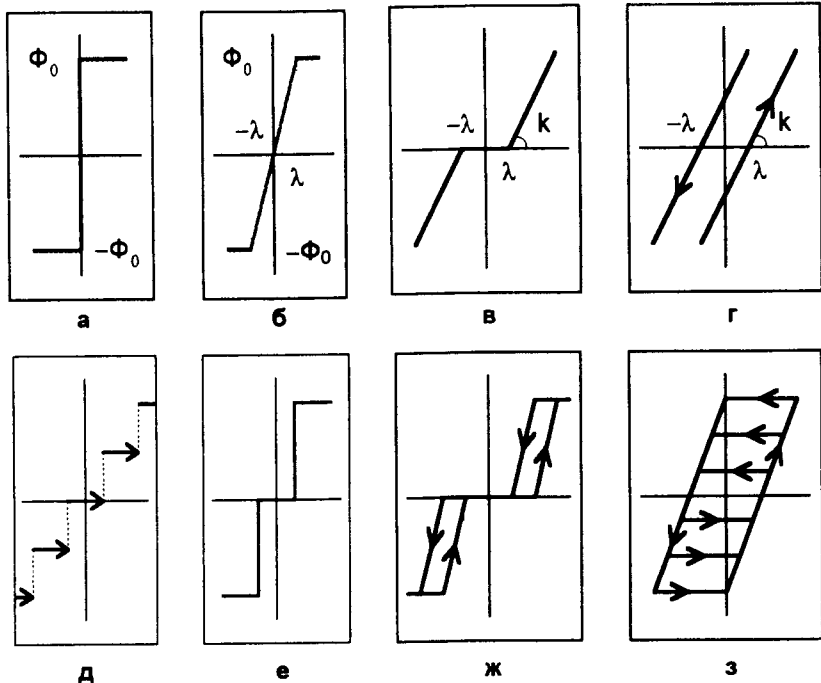


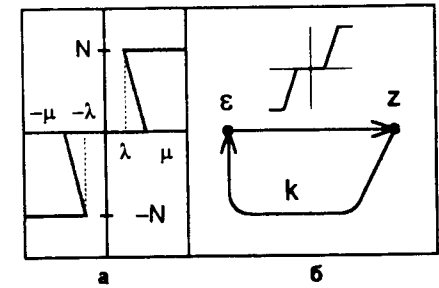
РИС. 43

- характеристика гистерезиса (рис. 43, б)  
 $\Phi(\varepsilon; \lambda, k) = k(\varepsilon - \lambda \operatorname{sgn} \varepsilon)$ ;
- характеристика аналого-цифрового преобразования (рис. 43, д)  
 $\Phi(\varepsilon) = [\varepsilon + 0,5 \operatorname{sgn}(\varepsilon + 0,5)]$ ,

где функция  $[\varepsilon]$  — *целая часть* от  $\varepsilon$  — ближайшее целое число, не превосходящее  $\varepsilon$ .

На рис. 43 представлены и более сложные нелинейные характеристики, полученные из основных: характеристика идеального трехпозиционного реле (рис. 43, е), характеристика трех-

РИС. 44



позиционного реле с гистерезисом (рис. 43, ж), характеристики типа люфт (рис. 43, з) и упор (рис. 43, и).

Системы управления, содержащие более чем одну нелинейность, могут быть приведены к канонической структуре с одной нелинейностью путем использования некоторых правил преобразования нелинейных характеристик:

*последовательное* соединение двух нелинейных звеньев с характеристиками  $\Phi_1(\varepsilon)$ ,  $\Phi_2(\varepsilon)$  эквивалентно звену с нелинейной характеристикой

$$\Phi(\varepsilon) = \Phi_2(\Phi_1(\varepsilon));$$

*параллельное* соединение двух нелинейных звеньев с характеристиками  $\Phi_1(\varepsilon)$ ,  $\Phi_2(\varepsilon)$  эквивалентно звену с нелинейной характеристикой

$$\Phi(\varepsilon) = \Phi_1(\varepsilon) + \Phi_2(\varepsilon);$$

*встречно-параллельное* соединение двух нелинейных звеньев с характеристиками  $\Phi_1(\varepsilon)$ ,  $\Phi_2(\varepsilon)$ , соединенных по схеме с отрицательной обратной связью, эквивалентно звену с нелинейной характеристикой

$$\Phi(\varepsilon) = \{(\varepsilon, z): \varepsilon = \Phi_1^{-1}(z) + \Phi_2(z)\}.$$

Встречно-параллельное соединение с положительной обратной связью позволяет, используя однозначные нелинейности, формировать неоднозначные и разрывные характеристики. На рис. 44, а приведена неоднозначная характеристика, которой обладает нелинейный элемент, собранный по структуре встречно-параллельного соединения, изображенного на рис. 44, б.

### 4.3. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Топологические методы анализа являются не только качественными, но часто и количественными методами исследования нелинейных систем. Эти методы применимы к автономным управляемым и неуправляемым системам, при этом решение дифференциальных уравнений — модели движения системы ищется не как явная функция времени, а в виде интегральной кривой в пространстве координат состояния.

**Интегральная кривая**  $x(t)$  — это график решения системы. В каждой точке пространства состояния системы определен вектор  $F(x)$ , который имеет очевидный кинематический смысл, — это вектор мгновенной скорости движения изображающей точки по интегральной кривой. Таким образом, совокупность интегральных кривых системы определяет **векторное поле скоростей**, и наоборот. Пространство состояний системы, в котором решения интерпретируются как движение по интегральным кривым, называется **фазовым пространством** системы, траектории движения — **фазовыми траекториями**, вектор  $F(x)$  — вектором **фазовой скорости**, а его компоненты — **фазовыми скоростями**,  $x(t)$  — изображающей, или **фазовой, точкой**. Время рассматривается как параметр на кривой, который указывает направление движения, таким образом, фазовые кривые являются параметрически ориентированными кривыми. Совокупность всех фазовых кривых системы образует ее **фазовый портрет**.

Любая точка фазового пространства, для которой  $F(x)$  не обращается в нуль, называется **обыкновенной**, или **регулярной**, фазового портрета системы. Точка  $x^*$ , в которой  $F(x^*) = 0$ , называется **особой**, или **сингулярной**. В особой точке вектор фазовой скорости равен нулю, поэтому особые точки называют еще **точками покоя**, или **точками равновесия**.

Рассмотрим систему второго порядка:

$$\begin{aligned}x'_1 &= f_1(x_1, x_2); \\x'_2 &= f_2(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Уравнение  $dx_2/dx_1 = f_2(x_1, x_2)/f_1(x_1, x_2)$ , которое получается из исходной модели исключением независимой переменной  $t$ , есть **уравнение фазовых траекторий** на фазовой плоскости.

В некоторых случаях удается найти аналитическое решение этого уравнения. В общем случае уравнение фазовых кривых решается приближенными графическими методами или машинными инструментальными средствами.

Особые точки фазового портрета системы определяет система уравнений:

$$f_1(x_1, x_2) = 0; \quad f_2(x_1, x_2) = 0.$$

Основы топологических методов фазовой плоскости для анализа нелинейных систем были заложены А. Пуанкаре (1893) и развиты для систем автоматического управления А.А. Андроновым (1928).

#### Примеры

1. Фазовый портрет системы  $x'_1 = x_2$ ,  $x'_2 = x_1$  находим из уравнения фазовых кривых:

$$x_2 dx_2 - x_1 dx_1 = 0, \quad x_2 \neq 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид  $x_1^2 - x_2^2 = C$ . Это семейство гипербол, изображенное на рис. 45, имеет одну особую точку  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 0$ .

2. Для линейной модели математического маятника

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_2; \\x'_2 &= -\omega^2 x_1\end{aligned}$$

уравнение фазовых кривых имеет вид  $dx_2/dx_1 = -\omega^2 x_1/x_2$ . Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, представим его в виде

$$x_2 dx_2 + \omega^2 x_1 dx_1 = 0,$$

откуда после интегрирования имеем решение  $x_2^2 + \omega^2 x_1^2 = C$ .

Таким образом, фазовый портрет линейной модели математического маятника на плоскости  $\{\omega x_1, x_2\}$  представляется совокупностью концентрических окружностей, а в естественных

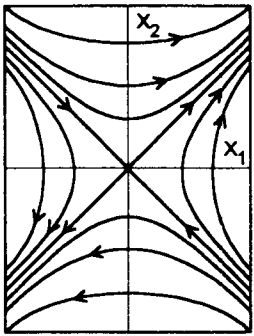


РИС. 45

координатах  $\{x_1, x_2\}$  — семейством эллипсов. У этой системы одна точка покоя - в начале координат.

3. Для построения фазового портрета нелинейной модели математического маятника

$$\varphi'' + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad \varphi_0, \quad \varphi'_0$$

проинтегрируем по  $t$  обе части этого уравнения, предварительно умножив его на  $\varphi'$ . Получим сначала

$$\int \varphi' \varphi'' dt + \omega^2 \int \sin \varphi \varphi' dt = C,$$

а затем

$$\int \varphi' d\varphi' + \omega^2 \int \sin \varphi d\varphi = C,$$

откуда находим искомые уравнения кривых фазового портрета:

$$(\varphi')^2 = 2\omega^2 \cos \varphi + C.$$

В координатах состояния  $x_1 = \varphi$ ,  $x_2 = \varphi'$  это уравнение принимает вид

$$x_2^2 - 2\omega^2 \cos x_1 = C.$$

На рис. 38 представлен фазовый портрет нелинейного математического маятника. В малой окрестности точек  $2k\pi$  близок к портрету линейного маятника. Портрет содержит замкнутые и незамкнутые кривые, которые соответствуют периодическим и непериодическим движениям маятника

Продолжим изучение фазового портрета нелинейного маятника. Пусть начальные условия движения приняты в точке

$$x_1(0) = \varphi_0 = \varphi_{\max}; \quad x_2(0) = \varphi'_0 = 0,$$

тогда  $C = -2\omega^2 \cos \varphi_0$ , поэтому уравнение замкнутых фазовых кривых имеет вид

$$x_2 = \omega(2(\cos x_1 - \cos \varphi_0))^{0.5},$$

Заметим, что кривая, которая отделяет семейство колебательных движений от семейства вращательных, определяется при  $\varphi_0 = \pm\pi$ , называется *сепаратрисой* и описывается уравнением

$$x_2 = \pm 2\omega \cos x_1/2.$$

Особые точки этой системы:  $x_1^* = k\pi$ ,  $x_2^* = 0$ , где  $k$  — целое число.

4. Линейная часть нелинейной системы управления имеет передаточную функцию  $W(s) = 1/s^2$ , нелинейный элемент имеет симметричную характеристику двухпозиционного реле с гистерезисом:

$$\Phi(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon > 1, \text{ или } (\varepsilon' < 0, |\varepsilon| < 1); \\ -1, & \varepsilon < -1, \text{ или } (\varepsilon' > 0, |\varepsilon| < 1). \end{cases}$$

Модель этой системы в координатах состояния  $x_1 = u$ ,  $x_2 = u'$  принимает вид

$$x'_1 = x_2; \quad x'_2 = \Phi(\varepsilon); \quad \varepsilon = u - y.$$

Фазовый портрет системы складывается из двух полупортретов:

$$x'_1 = x_2; \quad x'_2 = \pm 1,$$

которые склеиваются по линии переключения.

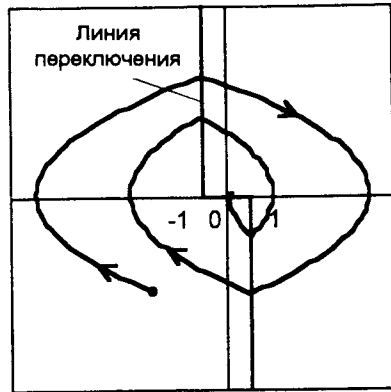


РИС. 46

Пусть  $u(t) \equiv 0$ , тогда  $\varepsilon = -x_1$ , поэтому линия переключения определяется уравнением  $x_1 = -\operatorname{sgn} x_2$ . Оба полупортрета представляют собой семейство парабол  $x_1 = -0,5x_2^2 + C$ , поскольку уравнения фазовых кривых этой системы имеет вид

$$x_2 dx_2 \pm dx_1 = 0.$$

На рис. 46 изображена одна из фазовых траекторий портрета системы. Система имеет непрерывное множество особых точек:  $\{x_1^* \in [-1, 1], x_2^* = 0\}$ .

5. Особые точки системы  $x_1' = \sin x_1, x_2' = -\sin x_2$ , портрет которой изображен на рис. 41, определяются из уравнений

$$\sin x_1 = 0; \quad \sin x_2 = 0.$$

Совокупность особых точек этой системы представляется множеством:

$$\{x_1^* = k\pi, x_2^* = m\pi; \quad k, m \text{ — целые числа}\}.$$

Основным графическим методом построения траекторий фазового портрета системы является *метод изоклин*. Множество точек пространства, в которых наклон фазовых траекторий один и тот же, образует кривую, которую называют *изоклиной*. В особой точке наклон фазовых кривых неоднозначен, поэтому изоклины пересекаются в этих точках.

Рассмотрим вновь для системы второго порядка уравнение фазовых траекторий. Положим, что

$$dx_2/dx_1 = f_2(x_1, x_2)/f_1(x_1, x_2) = J(x_1, x_2) = C.$$

Уравнение  $J(x_1, x_2) = C$  полностью определяет изоклину наклона  $C$ . После построения этой кривой на нее наносят короткие отрезки под наклоном  $dx_2/dx_1 = C$ . Повторяя эти построения для различных значений  $C$ , получим графический образ векторного поля фазовых скоростей, по которому, начиная с исходной точки и следуя локальному направлению поля, можно изобразить фазовую траекторию.

### Примеры

1. Рассмотрим нелинейную модель [6], для которой уравнение изоклин имеет вид

$$dx_2/dx_1 = x_1^2 + x_2^2 = C.$$

Семейство изоклин наклона  $C$  представляется совокупностью концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом  $C^{0.5}$ . На рис. 47 приведены изолинии, фрагмент поля направлений и реконструкция фазовых траекторий этой системы.

### 2. Система

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2 - 1; \\ x_2' &= -3x_1 - 4x_2 + 3 \end{aligned}$$

имеет точку покоя  $x_1^* = 1, x_2^* = 0$ . Уравнение изоклин имеет вид

$$-3x_1 - 4x_2 + 3 = C(x_1 + 2x_2 - 1)$$

или после преобразования:

$$x_2 = (3 + C)(1 - x_1)/(2C + 4).$$

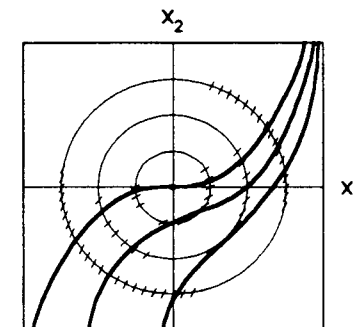


РИС. 47

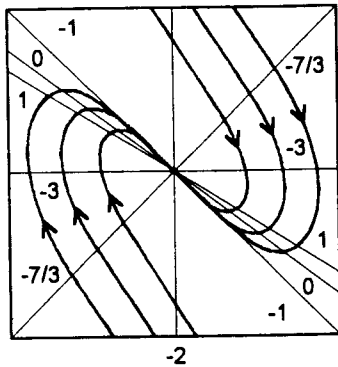


РИС. 48

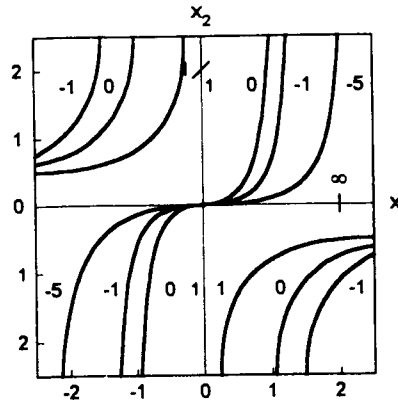


РИС. 49

Семейством изоклин является пучок прямых, проходящих через особую точку. На рис. 48 представлены изоклины и несколько фазовых траекторий этой системы.

3. На рис. 40 изображен фазовый портрет для частного случая нелинейной системы осциллятора Ван-дер-Поля. Исследование этой системы в общем случае и этот портрет был получен Ван-дер-Подем (1926) методом изоклин. Уравнение изоклин для этой системы имеет вид

$$(1 - x_1^2)x_2 - x_1 = Cx_2.$$

На рис. 49 приведены изоклины различных наклонов нелинейного осциллятора в окрестности особой точки.

Поведение нелинейной системы второго порядка в окрестности особых точек изучал еще в 1876 году Н.Е. Жуковский, полный анализ и классификацию особых точек по характеру локального фазового портрета для нелинейных систем второго и третьего порядка выполнил в начале XX века А. Пуанкаре.

Нелинейная система второго порядка в достаточно малой окрестности особой точки описывается парой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1(x_1, x_2); \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2(x_1, x_2), \end{aligned}$$

где  $g_1(x_1, x_2)$ ,  $g_2(x_1, x_2)$  — полиномы от  $x_1, x_2$  в степенях выше первой, стремящиеся к нулю с приближением к особой точке.

В этих условиях локальное представление нелинейной системы имеет вид линейной модели:

$$\begin{aligned} x' &= Ax, \\ A &= (a_{ij}); \\ x &= (x_1, x_2)^T, \end{aligned}$$

поэтому локальный фазовый портрет системы полностью определяется характеристическими числами матрицы  $A$ .

- Характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2$  — действительные, одного знака и различные. Локальный портрет в особой точке называется **узлом**, причем **устойчивым узлом** (рис. 50, а), если  $\lambda_1, \lambda_2$  — отрицательные, и **неустойчивым узлом** (рис. 50, б) — в противном случае.
- Характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2$  — действительные, одного знака, но равные. Локальный портрет в особой точке называется **вырожденным узлом** (рис. 50, в, г).
- Характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2$  — действительные, разных знаков. Локальный портрет в особой точке называется **седлом** (рис. 50, д).
- Характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2$  — комплексные. Локальный портрет в особой точке называется **фокусом** (рис. 50, е, ж), устойчивым, если корни — левые, и неустойчивым, если корни — правые. Локальный портрет в особой точке называется **центром** (рис. 50, з), когда характеристические числа — чисто мнимые.
- Среди характеристических чисел есть равные нулю. Локальный портрет в особой точке — параллельные прямые. Если лишь одно число равно нулю (рис. 50, и, к), то множество особых точек — прямая  $x_1 = 0$ . Если оба характеристических числа равны нулю (рис. 50, л), то множество особых точек либо прямая  $x_2 = 0$ , либо любая точка фазовой плоскости.

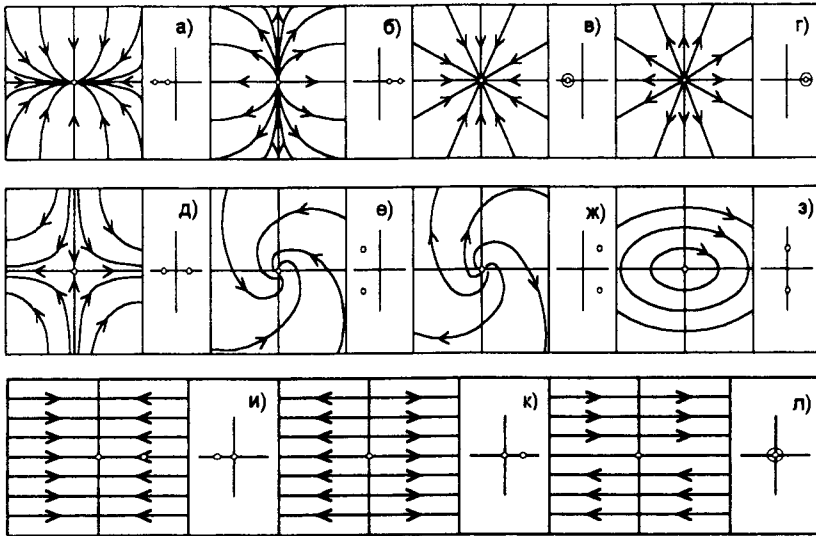


РИС. 50

Ориентацию на фазовых траекториях определяет параметр, которым является время. Поэтому направление движения по фазовой кривой определяется по одному из уравнений модели. Например, если модель системы содержит уравнение  $x_1' = x_2$ , то ориентация фазовых кривых совпадает с направлением часовой стрелки. Время движения по фазовой траектории  $x_2 = \varphi(x_1)$  от точки  $A = (x_1^0, x_2^0)$  до точки  $B = (x_1^*, x_2^*)$  может быть найдено интегрированием выражения

$$t_{AB} = \int_{x_1^0}^{x_1^*} dx_1 / f_1(x_1, \varphi(x_1)).$$

### Пример

Фазовый портрет гармонического осциллятора

$$x_1' = x_2; \quad x_2' = -\omega^2 x_1$$

состоит из концентрических эллипсов  $x_2^2 + \omega^2 x_1^2 = \gamma^2$ . Время движения по эллипсу с полуосями  $\gamma/\omega$ ,  $\gamma$  равно

$$4 \int_0^{\gamma/\omega} dx_1 / (r^2 - \omega^2 x_1^2)^{0.5} = 4 \arcsin \omega x_1 / r \int_0^{\gamma/\omega} = 2\pi/\omega.$$

Известный результат!

Замкнутая фазовая траектория соответствует периодическому движению системы. Замкнутая изолированная траектория фазового портрета называется **предельным циклом**.

Изолированность замкнутой траектории означает, что для нее существует окрестность, в которой нет других замкнутых траекторий. Например, все траектории фазового портрета гармонического осциллятора, хотя и замкнутые, но не изолированные, поскольку в любой сколь угодно малой окрестности каждой замкнутой траектории есть как минимум одна замкнутая траектория.

### Примеры

#### 1. Фазовый портрет системы

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2); \\ x_2' &= -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

имеет предельный цикл — окружность  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .

Действительно, модель системы в полярных координатах  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$  принимает вид

$$r' = r(1 - r^2); \quad \varphi' = -1.$$

Ясно, что  $r(t) \equiv 1$ ,  $\varphi(t) = -t$  является решением этой системы. Это решение — окружность — замкнутая кривая, по которой изображающая точка движется с постоянной угловой скоростью. Если начальная точка внутренняя, то величина  $r'$  положительная, а это значит, что все внутренние траектории с ростом времени удаляются от особой точки, приближаясь бесконечно близко к окружности. Если же начальные точки лежат вне круга  $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ , то величина  $r'$  отрицательная, значит, со временем полярный радиус каждой кривой уменьшается. Внешние траектории с ростом времени наматываются на окружность  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , которая



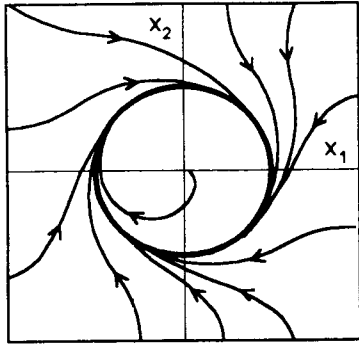


РИС. 51

таким образом оказывается изолированной, т.е. предельным циклом (рис. 51).

2. Фазовый портрет осциллятора Ван-дер-Поля (см. рис. 40) содержит предельный цикл.

#### 4.4. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ

Линеаризация как представление модели нелинейной системы в линейном виде является простейшим методом, который позволяет использовать аналитический аппарат теории линейных систем для анализа нелинейных систем. Известны три основных метода линеаризации: *касательная, гармоническая и стохастическая*.

- **Касательная линеаризация** осуществляется в предположении, что движение нелинейной системы происходит в достаточно малой окрестности "рабочей точки" пространства состояния системы. Параметры линеаризованной системы находят из разложения нелинейной модели в ряд Тейлора по степеням малых отклонений от рабочей точки или методом наименьших квадратов Гаусса [4]. Метод касательной линеаризации изложен в 2.3.

- **Гармоническая линеаризация** осуществляется не во временной области, а в частотной, для систем, работающих с гармоническими сигналами. Суть метода состоит в том, что при наличии фильтрующих свойств у линейных элементов системы, в установившейся реакции на гармонический входной сигнал учитывается лишь основная гармоническая составляющая.

- **Стохастическая линеаризация** осуществляется во временной области для систем, испытывающих случай-

ные возмущения. Метод состоит в аппроксимации нелинейной модели статистически эквивалентным линейным оператором.

#### **Гармоническая линеаризация** (Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов, 1934)

Метод гармонической линеаризации, или метод описывающих функций, основывается на трех допущениях:

- выходной сигнал системы является периодическим и его частота совпадает с частотой входного гармонического сигнала;
- структура системы имеет канонический вид (см. рис. 42) и содержит один нелинейный элемент, характеристика которого стационарна и кососимметрична;
- линейная часть системы обладает свойствами низкочастотного фильтра, что позволяет подавлять высшие гармоники в выходном сигнале.

Пусть входной сигнал нелинейного элемента системы является гармоническим  $\varepsilon(t) = A \sin \omega t$ , выходной сигнал нелинейного элемента с характеристикой  $\Phi(\varepsilon)$  имеет вид периодического сигнала  $z(t) = \Phi(A \sin \omega t)$ , который можно разложить в ряд Фурье:

$$z(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cos k\omega t + C_k \sin k\omega t).$$

В силу допущений метода  $B_0 = 0$ ,  $B_k = C_k = 0$ ,  $k > 1$ , поэтому

$$z(t) = B_1 \cos t + C_1 \sin \omega t,$$

где 
$$B_1 = 2\pi^{-1} \int_0^{\pi} \Phi(A \sin \omega t) \cos \omega t \, d\omega t;$$

$$C_1 = 2\pi^{-1} \int_0^{\pi} \Phi(A \sin \omega t) \sin \omega t \, d\omega t,$$

Обозначим

$$D^2 = B_1^2 + C_1^2; \quad B_1 = D \sin \varphi; \quad C_1 = D \cos \varphi,$$

тогда

$$z(t) = D \sin(\omega t + \varphi); \quad \varphi = \arctg(B_1/C_1).$$

Выходной сигнал нелинейного элемента оказывается также гармоническим! В этих условиях можно говорить, что нелинейный элемент ведет себя как линейное звено. Найдем передаточную функцию этого псевдолинейного звена, для чего воспользуемся комплексной формой записи входного и выходного гармонических сигналов:

$$\begin{aligned} \varepsilon^*(t) &= \text{Im } A e^{j\omega t}; \\ z^*(t) &= \text{Im } D e^{j(\omega t + \varphi)}; \\ N(A; \omega) &= z^*(t)/\varepsilon^*(t) = D e^{j\varphi} / A. \end{aligned}$$

Выражение  $N(A; \omega)$  называют *эквивалентной передаточной функцией*, или *описывающей функцией*, или *комплексным передаточным коэффициентом* нелинейного элемента системы:

$$N(A; \omega) = D/A \cos \varphi + jD/A \sin \varphi = k_1(A; \omega) + jk_2(A; \omega),$$

где  $k_1(A; \omega) = C_1/A$ ,  $k_2(A; \omega) = B_1/A$  — *действительный и мнимый коэффициенты гармонической линеаризации*.

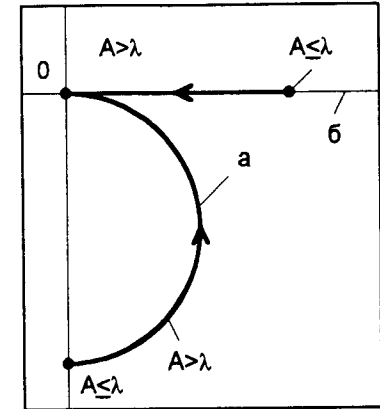
Описывающая функция  $N(A; \omega)$  является комплексной функцией амплитуды гармонического входного воздействия, при этом частота входного сигнала оказывается параметром. Описывающая функция гармонически линеаризованного нелинейного элемента порождает годограф

$$\{N(A): A \in (0, \infty), \omega = \text{const}\},$$

который представляет собой эквивалентную амплитудно-фазовую характеристику нелинейного элемента. На рис. 52 изображены два годографа нелинейных звеньев:

а) идеального двухпозиционного реле с прямоугольным гистерезисом;

РИС. 52



б) идеального трехпозиционного реле.

Изменяя частоту входного гармонического сигнала как параметр, можно получить семейство годографов:

$$\{N(A): A \in (0, \infty), \omega = \text{var}\}.$$

Коэффициенты гармонической линеаризации можно найти по выражениям

$$\begin{aligned} k_1(A) &= 2(A\pi)^{-1} \int_0^\pi \Phi(A \sin \omega t) \sin \omega t \, d\omega t; \\ k_2(A) &= 2(A\pi)^{-1} \int_0^\pi \Phi(A \sin \omega t) \cos \omega t \, d\omega t. \end{aligned}$$

Заметим, что для однозначных характеристик нелинейных звеньев

$$N(A) = k_1(A); \quad k_2(A) = 0.$$

### Пример

Найдем описывающую функцию нелинейного звена с характеристикой насыщения:

$$\Phi(\varepsilon) = \Phi_0 \text{sat}(\varepsilon/\lambda).$$

Пусть входной гармонический сигнал имеет амплитуду большую, чем  $\lambda$ , тогда выходной сигнал нелинейного звена, как видно из рис. 53, а, будет иметь форму усеченной синусоиды:

$$z = \Phi_0 A/\lambda \sin \omega t, \quad \text{когда } 0 \leq \omega t \leq \alpha,$$

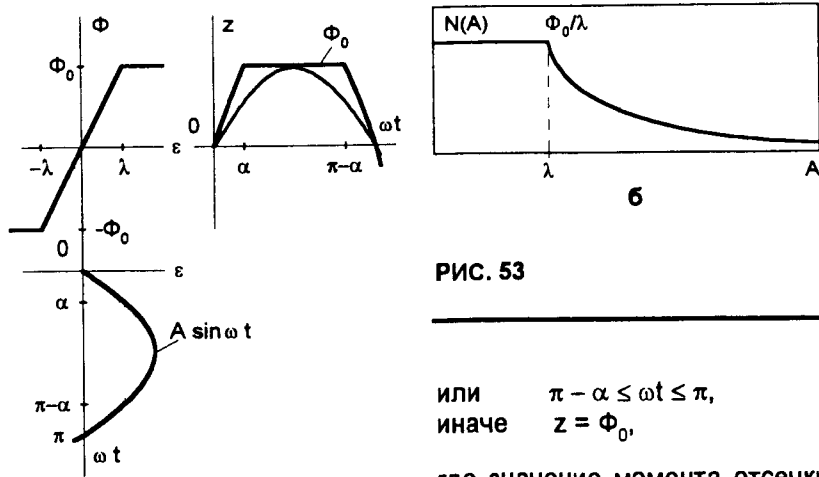


РИС. 53

или  $\pi - \alpha \leq \omega t \leq \pi$ ,  
иначе  $z = \Phi_0$ ,

где значение момента отсечки  
 $\alpha = \arcsin \lambda A$ .

Коэффициент гармонической линейзации  $k_1(A)$  при  $A \geq \lambda$ :

$$k_1(A) = 2(A\pi)^{-1} \Phi_0(A\lambda) \int_0^\alpha \sin^2 \omega t \, d\omega t + \int_\alpha^{\pi-\alpha} \sin \omega t \, d\omega t + A\lambda \int_{\pi-\alpha}^\pi \sin^2 \omega t \, d\omega t =$$

$$= 2\Phi_0(\lambda\pi)^{-1} (\arcsin \lambda A + \lambda A(1 - (\lambda A)^2)^{0.5}).$$

$$N(A) = \Phi_0(\lambda\pi)^{-1} (2\alpha + \sin 2\alpha), \quad \alpha = \arcsin \lambda A, \quad A \geq \lambda,$$

иначе  $N(A) = \Phi_0/\lambda$ .

На рис. 53, б изображен график описывающей функции звена ограничения.

Заметим, что если  $\lambda \rightarrow 0$ , то предельное выражение описывающей функции звена ограничения представляет описывающую функцию идеального релейного элемента:

$$N(A) = 4\Phi_0(A\pi)^{-1}.$$

В [4] приведены формулы для вычисления коэффициентов гармонической линейзации большого числа одно- и двухзначных типовых характеристик нелинейных звеньев.

### Стохастическая линейзация

Пусть  $\varepsilon(t)$  — стационарный эргодический случайный процесс с нулевым средним, тогда и выходной сигнал стационарной нечетной нелинейности  $\Phi(\varepsilon)$  оказывается стационарным эргодическим случайным процессом.

В этих условиях определим линейную модель нелинейного звена из условия наилучшего среднеквадратичного приближения

$$\hat{z}(t) = K_s \varepsilon(t); \quad M\{(z(t) - \hat{z}(t))^2\} \rightarrow \min_{K_s}$$

Назовем  $K_s$  коэффициентом стохастической линейзации. Выражение для коэффициента стохастической линейзации найдем, применив необходимые условия экстремума к функции:

$$M\{(z(t) - K_s \varepsilon(t))^2\}.$$

Получим

$$M\{(z(t) - K_s \varepsilon(t))\varepsilon(t)\} = 0.$$

Из этого соотношения находим, что

$$K_s = R_{z\varepsilon}(0)/R_\varepsilon(0),$$

где  $R_{z\varepsilon}(0)$ ,  $R_\varepsilon(0)$  — значения в нуле взаимной и автокорреляционной функций.

Пусть входной случайный процесс — шум с плотностью  $f(\varepsilon)$ , с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ , тогда коэффициент стохастической линейзации можно найти из выражения

$$K_s(\sigma) = \sigma^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\varepsilon) \varepsilon f(\varepsilon) \, d\varepsilon.$$

В силу эргодичности случайных процессов входа и выхода коэффициент стохастической линейзации может быть найден и по выражению

$$K_s(\sigma) = \sigma^{-2} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \Phi(\varepsilon) \varepsilon f(\varepsilon) \, d\varepsilon,$$

Если входной случайный процесс является нормальным гауссовым процессом и характеристика нелинейности непрерывно дифференцируемая, то выражение для коэффициента стохастической линеаризации оказывается более простым. В самом деле, подставим в исходное выражение для  $K_s(\sigma)$  функцию одномерной нормальной плотности распределения вероятностей:

$$f(\varepsilon) = [(2\pi\sigma^2)^{-0.5} \exp(-\varepsilon^2/(2\sigma^2))].$$

Получим

$$K_s(\sigma) = \sigma^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\varepsilon) \varepsilon [(2\pi\sigma^2)^{-0.5} \exp(-\varepsilon^2/(2\sigma^2))] d\varepsilon.$$

Выполним в интеграле преобразования и учтем нечетность нелинейности:

$$K_s(\sigma) = -2(2\pi\sigma^2)^{-0.5} \int_0^{\infty} \Phi(\varepsilon) d[\exp(-\varepsilon^2/(2\sigma^2))].$$

После интегрирования по частям окончательно получим

$$K_s(\sigma) = 2(2\pi\sigma^2)^{-0.5} \int_0^{\infty} \Phi'(\varepsilon) [\exp(-\varepsilon^2/(2\sigma^2))] d\varepsilon.$$

## Примеры

1. Выполним стохастическую линеаризацию для нелинейного элемента с характеристикой идеального реле с нечувствительностью:

$$\Phi(\varepsilon) = \Phi_0 \operatorname{sgn} \varepsilon, \quad |\varepsilon| > \lambda,$$

иначе  $\Phi(\varepsilon) = 0$ .

Нелинейный элемент испытывает воздействие гауссова шума.

Значение коэффициента стохастической линеаризации определим из выражения

$$K_s(\sigma) = 2\sigma^{-2} \int_{\lambda}^{\infty} \Phi_0 \varepsilon [(2\pi\sigma^2)^{-0.5} \exp(-\varepsilon^2/(2\sigma^2))] d\varepsilon,$$

которое после необходимых преобразований принимает вид

$$K_s(\sigma) = 2\Phi_0(2\pi\sigma^2)^{-0.5} \exp(-\lambda^2/(2\sigma^2)).$$

Заметим, что если в полученном соотношении положить  $\lambda = 0$ , то имеем выражение коэффициента стохастической линеаризации идеального реле:

$$K_s(\sigma) = 2(2\pi)^{-0.5} \Phi_0 / \sigma.$$

2. Выполним стохастическую линеаризацию для нелинейного элемента с характеристикой нечувствительности:

$$\Phi(\varepsilon; \lambda, k) = k \operatorname{dez}(\varepsilon/\lambda).$$

Нелинейный элемент испытывает воздействие гауссова шума.

Характеристика нелинейности непрерывна и на полуоси  $\varepsilon \geq \lambda$  непрерывно дифференцируема, при этом  $\Phi'(\varepsilon) = k$ . Поэтому значение коэффициента стохастической линеаризации определяется выражением

$$K_s(\sigma) = 2k(2\pi\sigma^2)^{-0.5} \int_{\lambda}^{\infty} \exp(-\varepsilon^2/(2\sigma^2)) d\varepsilon,$$

которое с точностью до множителя совпадает с табулированным интегралом вероятностей и, значит, может быть вычислен.

## 4.5. УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить семейство интегральных кривых для системы:

а)

$$x' = 4xt;$$

б)

$$x' = -2t/x;$$

в)

$$x' = \sin x.$$

Найти аналитически фазовый портрет для системы:

а)

$$x'_1 = x_2; \quad x'_2 = x_2^2/x_1;$$

б)

$$x'_1 = -x_1; \quad x'_2 = -2x_2.$$

Найти точки покоя системы:

а)

$$x' = x^3 - x;$$

б)

$$x'_1 = -x_2; \quad x'_2 = -\sin x_1;$$

в)

$$x'_1 = x_1 - x_2; \quad x'_2 = x_2(x_1 - x_2^2).$$

2. Выполнить необходимые преобразования и убедиться в следующем:

а) нелинейный элемент с характеристикой трехпозиционного реле может быть получен последовательным соединением звена с характеристикой нечувствительности и идеального реле;

б) нелинейный элемент с характеристикой двухпозиционного реле с прямоугольным гистерезисом шириной  $2\lambda$  может быть получен путем охвата звена с характеристикой идеального реле положительной обратной связью величиной  $\lambda$ ;

в) нелинейный элемент с характеристикой люфт (см. рис. 43, з) может быть получен путем охвата отрицательной обратной связью звена с характеристикой нечувствительности и последовательно соединенного с ним интегрирующего звена.

3. Методом изоклин построить фазовый портрет нелинейной системы:

а)

$$x'_1 = x_1 + x_2; \quad x'_2 = x_1^2;$$

б)

$$x'_1 = x_1(1 - x_2); \quad x'_2 = -x_2(1 - x_1);$$

в)

$$x'_1 = x_2^2; \quad x'_2 = x_2(2x_1 - x_2).$$

4. Построить фазовый портрет нелинейной системы канонической структуры (см. рис. 22):

а)

$$W(s) = 1/s^2; \quad \Phi(\varepsilon) = \operatorname{sgn} \varepsilon, \quad |\varepsilon| > 1,$$

иначе  $\Phi(\varepsilon) = 0$ ;

б)

$$W(s) = 1/(s^2 + 1); \quad \Phi(\varepsilon) = \operatorname{sgn} \varepsilon;$$

в)

$$W(s) = 1/(s^2 + s), \quad \Phi(\varepsilon) = \operatorname{sgn} \varepsilon, \quad |\varepsilon| > 2,$$

иначе  $\Phi(\varepsilon) = 0$ .

5. Система управления канонической структуры имеет линейную часть с передаточной функцией  $W(s) = 1/s^2$  и нелинейный элемент с характеристикой  $\Phi(\varepsilon) = \operatorname{sgn} \varepsilon$ .

Построить фазовый портрет системы.

Для устранения возникающих незатухающих колебаний предлагается ввести в структуру системы линейный регулятор с передаточной функцией форсирующего звена. Построить фазовый портрет такой системы.

6. Покажите, используя полярные координаты, что фазовый портрет системы

$$x'_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \sin 1/(x_1^2 + x_2^2 - 1);$$

$$x'_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \sin 1/(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

имеет предельные циклы.

7. Найти линейное представление в окрестности особой точки и построить локальный фазовый портрет этого представления для нелинейной системы:

а)

$$x'_1 = \sin x_1; \quad x'_2 = -\sin x_2;$$

б)

$$x'_1 = x_1(1 - x_2); \quad x'_2 = -x_2(1 - x_1);$$

в)

$$x'_1 = x_2; \quad x'_2 = -x_1 + x_1^3.$$

8. Найти описывающую функцию для нелинейного звена с характеристикой:

- а) двухпозиционного реле с прямоугольным гистерезисом;
- б) линейного гистерезиса.

Построить годографы комплексных коэффициентов гармонической линеаризации.

9. Найти описывающую функцию для нелинейного элемента, внешняя характеристика которого описывается дифференциальным уравнением

$$\Phi(\varepsilon) = \varepsilon'' - (1 - \varepsilon^2)\varepsilon' + \varepsilon.$$

10. Найти коэффициент стохастической линеаризации для нелинейного элемента

$$\Phi(\varepsilon) = x + \operatorname{sgn} x,$$

если входной шум гауссов.

## 5 СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

---

---

*Управляемость и наблюдаемость — Устойчивость линейных систем — Чувствительность и робастность систем управления — Динамические характеристики линейных систем — Динамические характеристики типовых звеньев линейных систем управления — Упражнения.*

### 5.1. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

Задача управления системой состоит в определении такой функции  $u(t)$ , при которой осуществляется целенаправленное движение системы. Но можно ли быть уверенным в том, что эта задача всегда разрешима? Положительный ответ на этот вопрос предопределяется двумя свойствами системы — ее **управляемостью** и **наблюдаемостью**.

**Определение.** Линейная система

$$\Sigma^{(n)}: \quad x' = Ax + Bu, \quad x(0), \quad y = Cx$$

является **вполне управляемой**, если она может быть переведена из любого начального состояния  $x(0)$  в любое конечное состояние  $x(T)$  за конечное время  $T$ .

**Теорема**

(R. Kalman, 1958)

Линейная система  $\Sigma^{(n)}: \langle A, B, C \rangle$  является вполне управляемой тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank} (B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B) = n.$$

Поскольку матрицы  $A_{n \times n}$  и  $B_{n \times m}$ , то матрица управляемости  $R = (B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B)$  имеет размер  $n \times mn$ .

**Определение.** Линейная система

$$\Sigma^{(n)}: x' = Ax + Bu, \quad x(0), \quad y = Cx$$

является **вполне наблюдаемой**, если любое ее состояние  $x(0)$  можно восстановить по значениям  $u(t)$  и  $y(t)$ , измеренным на интервале  $0 \leq t \leq T$ .

**Теорема**  
(R. Kalman, 1958)

Линейная система  $\Sigma^{(n)}: \langle A, B, C \rangle$  является вполне наблюдаемой тогда и только тогда, когда

$$\text{rang} (C^T : A^T C^T : (A^T)^2 C^T : \dots : (A^T)^{n-1} C^T) = n.$$

Поскольку матрицы  $A_{n \times n}$  и  $C_{k \times n}$ , то матрица наблюдаемости  $Q = (C^T : A^T C^T : (A^T)^2 C^T : \dots : (A^T)^{n-1} C^T)$  имеет размер  $n \times kn$ .

Заметим, что теоремы Калмана можно использовать как **критерии** полной управляемости и наблюдаемости системы.

**Примеры**

1. Система, заданная матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = (0 \quad 1),$$

является вполне управляемой и вполне наблюдаемой, поскольку

$$\text{rang} (B : AB) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} = 2;$$

$$\text{rang} (C^T : A^T C^T) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

2. Системы, заданные матрицами:

а)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

б)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

не являются вполне управляемыми, поскольку для этих систем второго порядка  $\text{rang} R = 1$ .

Причина неуправляемости для системы б) очевидна. В самом деле, ведь из второго уравнения этой системы  $x_2' = -x_2$  следует, что координата  $x_2 = Ce^{-t}$  и, поэтому не может быть изменена управлением.

3. Система  $x_1' = x_2, \quad x_2' = u$  является вполне наблюдаемой, если  $C = (1 \ 0)$ , и не вполне наблюдаемой, если  $C = (0 \ 1)$ ; в первом случае  $\text{rang} Q = 2$ , а во втором  $\text{rang} Q = 1$ . Причина ненаблюдаемости для второй системы состоит в том, что, измеряя лишь скорость перемещения  $x_2(t)$ , можно определить только перемещение, но не расстояние от точки отсчета, и поэтому  $x_1(t)$  оказывается неопределимым.

4. На рис. 54 представлена неуправляемая и ненаблюдаемая система, в чем можно убедиться, применив критерии Калмана или путем вычисления ее передаточной функции.

5. Для полной управляемости системы стабилизации:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 + u(t); \\ x_2' &= -x_1 - 3x_2 + 2u(t); \\ u(t) &= -Kx(t), \end{aligned}$$

где  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ ;  $K = (k_1, k_2)$ ,

необходимо и достаточно, чтобы  $k_1 \neq -5,5$ , а для полной наблюдаемости этой системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие  $k_1 - k_2 \neq -0,333$ . Эти результаты получены путем прямого использования критериев.

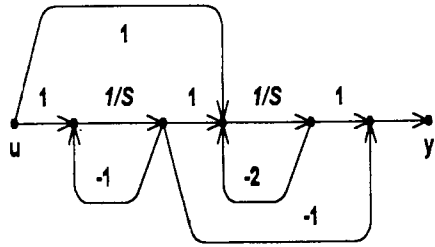


РИС. 54

Управляемость и наблюдаемость как характеристические свойства системы обладают в определенном смысле симметрией.

**Определение.** Линейные системы

$$\Sigma_1^{(n)}: \dot{x} = Ax + Bu; \quad y = Cx;$$

$$\Sigma_2^{(n)}: \dot{\xi} = A^T \xi + C^T u; \quad \psi = B^T \xi$$

называются **взаимно дуальными (двойственными)**.

### Теорема

(R. Kalman, 1961)

Линейная система  $\Sigma_1^{(n)}$  является вполне управляемой в том и только в том случае, если дуальная ей система  $\Sigma_2^{(n)}$  вполне наблюдаема. Линейная система  $\Sigma_1^{(n)}$  является вполне наблюдаемой в том и только в том случае, если дуальная ей система  $\Sigma_2^{(n)}$  вполне управляема.

## 5.2. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

При исследовании автоматических систем изучается их поведение на длительном интервале времени с целью установить, могут ли координаты состояния или выход системы со временем неограниченно возрасти. Эти вопросы связаны с понятием **устойчивости** движений системы, или устойчивости решений дифференциальных уравнений — модели системы.

Пусть рассматривается система, в которой отсутствует входное воздействие, система совершает собственные движения от запасенной энергии. Такие системы называют **автономными**.

Рассмотрим автономную систему  $\dot{x} = F(x(t))$  и ее некоторое движение  $x^*(t)$ , называемое **невозмущенным**.

**Определение.** Невозмущенное движение  $x^*(t)$  называется **устойчивым по Ляпунову**, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для всех движений  $x(t)$  системы, удовлетворяющих условию  $\|x(0) - x^*(0)\| < \delta$ , справедливо неравенство  $\|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon$  для всех  $t \geq 0$ .

Здесь  $\|x\| = (\sum x_i^2)^{0,5}$  обозначает евклидову норму вектора  $x$ . Иными словами, движение  $x^*(t)$  устойчиво, если достаточно близкие к нему в начальный момент движения  $x(t)$  не отклонятся в дальнейшем далеко от  $x^*(t)$ , полностью погружаясь в сколь угодно узкую  $\varepsilon$ -трубку вокруг траектории  $x^*(t)$ .

**Определение.** Движение  $x^*(t)$  называется **асимптотически устойчивым**, если оно устойчиво, по Ляпунову, и существует  $\rho > 0$  такое, что все движения  $x(t)$  системы, удовлетворяющие условию  $\|x(0) - x^*(0)\| < \rho$ , обладают свойством:

$$\|x(t) - x^*(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Иначе говоря, движение  $x^*(t)$  — асимптотически устойчиво, если все движения, достаточно близкие к нему в начальный момент, стягиваются со временем к  $x^*(t)$  сколь угодно близко.

Рассмотрим линейную систему  $\Sigma: \dot{x} = Ax + Bu$  и соответствующую ей однородную систему  $\Sigma_0: \dot{x} = Ax$ .

**Определение.** Линейную систему  $\Sigma$  будем называть **вполне устойчивой**, если все ее движения устойчивы.

### Теорема

Для устойчивости линейной системы  $\Sigma$  при любом управлении  $u(t)$  необходимо и достаточно, чтобы было устойчивым тривиальное движение  $x^0(t) \equiv 0, \quad t \geq 0$  однородной системы  $\Sigma_0$ .

В самом деле, пусть  $x^*(t)$  — некоторое устойчивое движение системы  $\Sigma$ . Это значит, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любого движения  $x(t)$  системы  $\Sigma$  справедли-



во неравенство  $\|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon$ , если только  $\|x(0) - x^*(0)\| < \delta$ . Обозначим  $z(t) = x(t) - x^*(t)$ . Ясно, что  $z(t)$  — решение однородной системы  $\Sigma_0$  как разность решений неоднородной системы, и, кроме того,  $\|z(t)\| < \varepsilon$ , если только  $\|z(0)\| < \delta$ . Но это и означает, что тривиальное движение устойчиво, по Ляпунову.

Таким образом, линейные системы обладают характерными свойствами:

- если хотя бы одно движение устойчиво, устойчивы все движения и, значит, устойчива сама система;
- если хотя бы одно движение неустойчиво, неустойчивы все движения и, значит, неустойчива вся система;
- линейная неоднородная система вполне устойчива тогда и только тогда, когда устойчива однородная система.

Рассмотрим линейную однородную стационарную систему  $\Sigma_0: \dot{x} = Ax$ , и пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — собственные числа матрицы  $A$ .

### Теорема (А.М. Ляпунов, 1892)

*Линейная стационарная система  $\Sigma_0$  устойчива тогда и только тогда, когда для всех собственных чисел  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ . Линейная стационарная система  $\Sigma_0$  асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда для всех собственных чисел  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ .*

### Примеры

1. Линейная модель математического маятника является устойчивой, по Ляпунову, однако не асимптотически. Собственные числа матрицы состояния этой системы, равные  $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ , имеют нулевую вещественную часть.

2. Линейная модель перевернутого математического маятника (2.2, пример 5) имеет среди собственных чисел матрицы состояний  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -kM^{-1}$ ,  $\lambda_3 = gL^{-1}$ ,  $\lambda_4 = gL^{-1}$  одно с положительной вещественной частью, поэтому такая система неустойчива.

## 5.3. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ И РОБАСТНОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В процессе функционирования автоматическая система всегда испытывает воздействие возмущений, которые приводят к изменению ее параметров, и, как следствие, к ухудшению качества управления. Способность системы изменять свои свойства в ответ на локальное изменение параметров называют **чувствительностью**, а способность в той или иной мере не реагировать на изменение параметров и внешних возмущений называют **робастностью** системы. Чувствительность и робастность как свойства системы используются при решении задач анализа и синтеза систем управления.

Мера чувствительности системы управления определяется по характеру ее возмущенного движения в окрестности известного базового движения  $x(t; \alpha)$ . Вариация параметров  $\Delta\alpha$  приводит к возмущенному движению  $x(t; \alpha + \Delta\alpha)$ , которое отличается от невозмущенного на функцию

$$\Delta x(t) = x(t; \alpha + \Delta\alpha) - x(t; \alpha),$$

называемую **дополнительным движением системы**. Дополнительное движение описывают конечным куском ряда Тейлора:

$$\Delta x(t) \approx (\partial x(t; \alpha) / \partial \alpha) \Delta\alpha + \dots + 1/k! (\partial^k x(t; \alpha) / \partial \alpha^k) \Delta\alpha^k,$$

и при достаточно малой вариации  $\Delta\alpha$  возмущенное движение оказывается линейным относительно этой вариации параметров:

$$x(t; \alpha + \Delta\alpha) = x(t; \alpha) + (\partial x(t; \alpha) / \partial \alpha) \Delta\alpha.$$

**Определение** Частные производные  $\partial^k x(t; \alpha) / \partial \alpha^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  называют **функциями чувствительности  $k$ -го порядка вектора состояния системы по параметру  $\alpha$** .

Функция чувствительности первого порядка вектора состояния системы по параметру  $\alpha$ :

$$S_{\alpha}^x(t; \alpha) = \partial x(t; \alpha) / \partial \alpha$$

имеет вид матрицы Якоби.

Частную производную вида  $LS_{\alpha}^x = \partial(\ln x(t; \alpha))/\partial(\ln \alpha)$  называют **логарифмической функцией чувствительности**.

$$LS_{\alpha}^x = (\partial x(t; \alpha)/x(t; \alpha))(\partial \alpha/\alpha) = S_{\alpha}^x(t; \alpha)\alpha/x(t; \alpha).$$

Функция чувствительности  $S_{\alpha}^x(t; \alpha)$  непрерывной системы

$$x' = F(t, x; \alpha); \quad t_0 = t_0(\alpha); \quad x_0 = x_0(\alpha)$$

является решением дифференциального уравнения:

$$dS_{\alpha}^x(t; \alpha)/dt = (\partial F/\delta x)x_{\alpha}(t; \alpha) + \partial F/\delta \alpha$$

с начальным условием

$$x_{\alpha}(t_0; \alpha) = dx_0(\alpha)/d\alpha - F(t_0, x_0; \alpha) dt_0(\alpha)/d\alpha.$$

Это уравнение называют **уравнением чувствительности**.

В частности, для линейной системы

$$x' = A(\alpha)x + B(\alpha)u$$

уравнение чувствительности принимает вид

$$dS_{\alpha}^x(t; \alpha)/dt = A(\alpha)S_{\alpha}^x(t; \alpha) + (\partial A(\alpha)/\partial \alpha)x + (\partial B(\alpha)/\partial \alpha)u.$$

Чувствительность автоматической системы с передаточной функцией  $H(s; \alpha)$ , зависящей от скалярного параметра  $\alpha$ , определяется:

**функцией чувствительности передаточной функции**

$$S_{\alpha}^H(s) = \partial H(s; \alpha)/\partial \alpha$$

**и функциями чувствительности частотных характеристик этой системы.**

## Примеры

1. Логарифмическая чувствительность замкнутой системы с передаточной функцией

$$W(s; k) = k/(s^2 + 2s + 3 + k)$$

к изменению параметра в окрестности  $k = 3$  может быть найдена по выражению

$$LS_k^W = S_k^W k/W(s; k); \quad S_k^W = \partial W(s; k)/\partial k.$$

Логарифмическая чувствительность этой системы к параметру  $k$  равна  $LS_k^W(s) = (s^2 + 2s + 3)/(s^2 + 2s + 6)$ . На низких частотах чувствительность системы около 0,5, на высоких — близка к единице.

2. Чувствительность передаточной функции инерционного звена  $W(s; k, T) = k/(Ts + 1)$  к изменению параметров  $k, T$  можно задавать функциями чувствительности амплитудной и фазовой частотных характеристик:

$$S_k^A(\omega) = T/(T^2 \omega^2 + 1)^{0,5};$$

$$S_T^A(\omega) = -kT/(T^2 \omega^2 + 1)^{1,5};$$

$$S_k^{\phi}(\omega) = 0; \quad S_T^{\phi}(\omega) = \omega T^2/(T^2 \omega^2 + 1).$$

3. Рассмотрим систему простейшей структуры, прямой тракт которой охвачен отрицательной обратной связью. Определим первоначально чувствительность передаточной функции  $H(s; W(s), G(s))$  замкнутой системы по отношению к варьируемой передаточной функции прямого тракта  $W(s)$ , а затем — к варьируемой передаточной функции отрицательной обратной связи  $G(s)$ . Логарифмическая функция чувствительности по отношению к передаточной функции прямого тракта определяется в виде

$$LS_W^H(s) = \partial(\ln H(s))/\partial(\ln W(s)) =$$

$$= (\partial H(s)/H(s))/(\partial W(s)/W(s)) =$$

$$= \partial H(s)W(s)/(\partial W(s)H(s)).$$

поэтому, учитывая, что

$$H(s; W, G) = W(s)/(1 + W(s)G(s)),$$

находим

$$LS_{W}^H(s) = 1/(1 + W(s)G(s)) = H(s)/W(s).$$

Аналогично во втором случае:

$$\begin{aligned} LS_G^H(s) &= \partial(\ln H(s))/\partial(\ln G(s)) = \\ &= H(s)G(s)/(1 + W(s)G(s)) = H(s)W(s). \end{aligned}$$

4. Чувствительность системы канонической структуры (см. рис. 22) по отношению к варьируемой передаточной функции объекта равна

$$LS_{W_0}^H(s) = 1/(1 + W_0(s)W_1(s)).$$

Чувствительность системы с внутренней положительной обратной связью (см. рис. 33, а) по отношению к варьируемой передаточной функции объекта равна

$$LS_{W_0}^H(s) = (1 - W_1(s)W_2(s))/(1 + W_0(s)W_1(s) - W_1(s)W_2(s)).$$

Основной путь снижения чувствительности системы к изменению параметров — это увеличение коэффициента передачи контура, содержащего звенья с варьируемыми параметрами. В частности, для системы канонической структуры, как следует из выражения для  $LS_{W_0}^H(s)$ , увеличение до бесконечности коэффициента усиления управляющего устройства может привести к снижению до нуля чувствительности системы. Нулевой чувствительности систем с внутренней положительной обратной связью можно добиться, выполнив условие  $W_1(s)W_2(s) = 1$ . Нетрудно заметить, однако, что условия обеспечения нулевой чувствительности системы физически нереализуемы, поскольку невозможно добиться бесконечного коэффициента усиления и невозможно точно реализовать обратные передаточные функции

$W_2(s) = W_1^{-1}(s)$ , ибо невозможно точно выполнить операцию дифференцирования. Системы с нулевой чувствительностью являются предельными, идеальными системами.

Реальные автоматические системы должны быть достаточно грубыми, малочувствительными по отношению к возможным ошибкам, неточностям и неопределенностям, которые имеют место при составлении математической модели этих систем. Указанные свойства объединяет термин *робастность*, который характеризует некоторые свойства не единственной системы, а целой совокупности систем, различаемых параметрически. Если математическая модель системы известна с точностью до значения некоторых параметров, то такую модель и систему называют *интервальной*. Неопределенность значения каждого параметра  $a_k$  представляется обычно интервалом  $\alpha_k \leq a_k \leq \beta_k$ , а совокупности параметров — многомерным параллелепипедом. При изучении интервальных систем управления используются *робастные методы*, или методы *интервального анализа*.

Рассмотрим, к примеру, характеристический полином интервальной системы:

$$\varphi_{\Sigma}(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n, \quad \alpha_k \leq a_k \leq \beta_k,$$

который в силу интервальной неопределенности параметров называют *интервальным многочленом*. Интересна задача: будет ли интервальная система устойчивой при всех изменениях ее параметров? В такой постановке задачи речь идет об устойчивости множества систем, а значит, о *робастной устойчивости*.

Для системы порядка  $n$  параметрический параллелепипед  $\{\alpha_k \leq a_k \leq \beta_k, k = 0, 1, \dots, n\}$  имеет  $2^{n+1}$  вершин, этим вершинам отвечают  $2^{n+1}$  угловых полинома  $\varphi_{\Sigma}(\lambda)$ , для которых  $a_k = \beta_k$  или  $a_k = \alpha_k$ . Естественно полагать, что условия робастной устойчивости должны составлять требования для всех угловых полиномов иметь собственные числа в левой полуплоскости. Это утверждение оказалось верным. Но известен и более сильный результат.

## Теорема

(В.Л. Харитонов, 1978)

Для того чтобы линейная система с интервальным характеристическим полиномом  $\varphi_2(\lambda)$  была робастно устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы четыре угловых полинома с коэффициентами

$$\alpha_0, \alpha_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_4, \alpha_5, \beta_6 \dots$$

$$\alpha_0, \beta_1, \beta_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_5, \beta_6 \dots$$

$$\beta_0, \beta_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_4, \beta_5, \alpha_6 \dots$$

$$\beta_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \beta_4, \alpha_5, \alpha_6 \dots$$

имели собственные числа в левой полуплоскости.

Указанные четыре многочлена носят название **харитоновых полиномов**. Заметим, что условия Харитонова для систем порядка не выше пятой являются избыточными, так, для интервальной системы второго порядка робастная устойчивость обеспечивается положительностью всех коэффициентов. Для системы третьего порядка робастная устойчивость обеспечивается одним харитоновым полиномом, для систем четвертого и пятого порядка необходимые и достаточные условия составляют соответственно два и три харитоновых полинома с левыми собственными числами.

## 5.4. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

**Динамической характеристикой** системы называют ее реакцию на специальное входное возмущение. Такими специальными — типовыми сигналами являются: **импульс, скачок, линейный и гармонический сигналы**. Приведем математические описания этих сигналов.

- **Единичный импульс (дельта-функция — функция Дирака)** определяется как функция  $\delta(t)$ , которая всюду равна нулю, кроме точки приложения, в которой она равна бесконечности. Интеграл от этой функции по любому интервалу, содержащему точку приложения, равен единице.

- **Единичный скачок (функция Хевисайда)** определяется как функция  $1(t)$ , равная нулю для  $t < 0$  и принимающая значение 1 для всех  $t \geq 0$ .

- **Линейное воздействие** определяется как функция, равная нулю для  $t < 0$  и изменяющаяся, как  $kt$  для  $t \geq 0$ .

- **Гармоническое воздействие** определяется как функция, равная нулю для  $t < 0$  и изменяющаяся, как  $U_m \exp(j\omega t)$  для  $t \geq 0$ .

Движение линейной системы

$$\Sigma^{(n)}: \dot{x}' = Ax + Bu, \quad x(0), \quad y = Cx \quad (5.1)$$

найдем в явном виде, используя преобразование Лапласа. Пусть

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)]; \quad Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]; \quad U(s) = \mathcal{L}[u(t)],$$

тогда из преобразованной модели движения находим, что

$$Y(s) = C(sE - A)^{-1}x(0) + C(sE - A)^{-1}BU(s).$$

Преобразовав это выражение обратно в действительную область, получим искомую реакцию системы на произвольное воздействие  $u(t)$ :

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t [Ce^{A(t-\tau)}B]u(\tau)d\tau.$$

Полученное выражение известно как **формула Коши для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения**, которое является моделью движения системы.

При нулевых начальных условиях реакция системы на произвольное воздействие  $u(t)$  определяется выражением

$$y(t) = \int_0^t [Ce^{A(t-\tau)}B]u(\tau)d\tau.$$

Обозначив в этом выражении

$$K(t) = Ce^{At}B, \quad (5.2)$$

получим в силу симметрии

$$y(t) = \int_0^t K(t - \tau)u(\tau)d\tau,$$

или

$$y(t) = \int_0^t K(\tau)u(t - \tau)d\tau, \quad (5.3)$$

что представляет собой выражение реакции изначально покоящейся системы на входное воздействие  $u(t)$ .

Пусть  $u(t) = \delta(t)$ , тогда реакция системы на импульсное воздействие, приложенное в момент времени  $\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ , совпадает с  $K(t)$ . Эту характеристику называют **импульсной**.

**Матричная импульсная характеристика**  $K(t)$  системы имеет размер  $k \times m$ , где  $k$  — количество выходов и  $m$  — количество входов системы.

Произвольный элемент  $k_{ij}(t)$  этой матрицы — реакция системы на  $i$ -м выходе системы от импульсного воздействия, приложенного к  $j$ -му входу в момент времени  $\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ .

Заметим, что преобразование Лапласа от импульсной функции системы совпадает с выражением передаточной функции системы:

$$\mathcal{L}[K(t)] = \mathcal{L}[Ce^{At}B] = C(sE - A)^{-1}B = H(s). \quad (5.4)$$

Пусть  $u(t) = 1(t)$ , тогда реакция системы на единичный скачок, называемая **переходной характеристикой**  $H(t)$ , совпадает с интегралом от импульсной функции, поэтому ее преобразование Лапласа равно

$$\mathcal{L}[H(t)] = H(s)/s. \quad (5.5)$$

Функции  $K(t)$ ,  $H(t)$  называют **временными динамическими характеристиками** системы.

### Примеры

1. Для системы с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,5 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеем передаточную функцию в виде

$$H(s) = \begin{pmatrix} 5/(s+5) & 5/(s+5) \\ 0,5/(s+10) & 2/(s+10) \end{pmatrix}.$$

При этом импульсная и переходная характеристики системы принимают вид

$$K(t) = \begin{pmatrix} 5e^{-5t} & 5e^{-5t} \\ 0,5e^{-10t} & 2e^{-10t} \end{pmatrix};$$

$$H(s) = \begin{pmatrix} 1-e^{-5t} & 1-e^{-5t} \\ 0,05(1-e^{-10t}) & 0,2(1-e^{-10t}) \end{pmatrix}.$$

2. Системы с одним входом и выходом имеют скалярные временные характеристики. Так, для системы с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = (1 \quad 2)$$

передаточная функция принимает вид

$$H(s) = 2(s + 5,5)/((s + 1)(s + 3)).$$

Поэтому импульсная характеристика системы

$$k(t) = 4,5e^{-t} - 2,5e^{-3t},$$

а переходная характеристика  $h(t) = 3,67 - 4,5e^{-t} + 0,83e^{-3t}$ .

Пусть на вход системы (5.1) подается гармонический сигнал  $u(t) = U_m \exp(j\omega t)$ ,  $t \geq 0$ . В силу линейных свойств системы в ней возникают установившаяся и переходная составляющие реакции. Переходная составляющая для асимптотически устойчивой системы со временем затухает, остается лишь установившаяся составляющая реакции системы на гармоническое воздействие. Эта составляющая также гармоническая, имеет вид  $x^*(t) = X_m \exp(j\omega t)$ . Функция  $x^*(t)$  является решением уравнения состояния (5.1) и поэтому, подставив ее в уравнение, получим

$$\mathbf{X}_m(j\omega)\exp(j\omega t) = \mathbf{A}\mathbf{X}_m\exp(j\omega t) + \mathbf{B}\mathbf{U}_m\exp(j\omega t).$$

Отсюда заключаем, что

$$\mathbf{X}_m = [(j\omega\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]\mathbf{U}_m.$$

Поэтому установившаяся составляющая выходного сигнала системы (5.1) принимает вид выражения:

$$\begin{aligned} y^*(t) &= \mathbf{C}\mathbf{X}_m\exp(j\omega t) = [\mathbf{C}(j\omega\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]\mathbf{U}_m\exp(j\omega t) = \\ &= [\mathbf{C}(j\omega\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]u(t). \end{aligned}$$

Иначе говоря, получили, что установившаяся реакция системы  $y^*(t) = \mathbf{H}(j\omega)u(t)$ .

Функцию  $\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{H}(s)|_{s=j\omega}$  называют **матричной частотной характеристикой** системы.

Для системы с одним входом и выходом этот же результат можно получить, используя выражение (5.3). В самом деле, установившийся процесс будет иметь место тогда, когда промежуток времени между моментом приложения воздействия и текущим моментом бесконечно велик, поэтому положим в (5.3) нижний предел интеграла равным бесконечности:

$$y^*(t) = \int_{-\infty}^t [k(\tau)u(t - \tau)]d\tau.$$

Если в этом выражении сделать замену  $t - \tau = z$ , то после преобразования получим выражение для установившейся реакции системы на любой входной сигнал:

$$y^*(t) = \int_0^{\infty} [k(\tau)u(t - \tau)]d\tau. \quad (5.5)$$

Воспользуемся этим выражением, чтобы найти установившуюся реакцию системы на входное гармоническое воздействие  $u(t) = U_m\exp(j\omega t + \beta)$ :

$$\begin{aligned} y^*(t) &= \int_0^{\infty} [k(\tau)U_m\exp(j\omega(t - \tau) + \beta)]d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} [k(\tau)\exp(-j\omega\tau)]d\tau [U_m\exp(j\omega t + \beta)] = \mathbf{H}(j\omega)u(t). \end{aligned}$$

Частотная характеристика  $\mathbf{H}(j\omega)$  как комплексная функция может быть представлена в декартовой или эйлеровой форме:

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{P}(\omega) + j\mathbf{Q}(\omega),$$

$$\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{A}(\omega)\exp[j\varphi(\omega)].$$

Функции

$$\mathbf{P}(\omega) = \operatorname{Re} \mathbf{H}(j\omega); \quad \mathbf{Q}(\omega) = \operatorname{Im} \mathbf{H}(j\omega);$$

$$\mathbf{A}(\omega) = \operatorname{mod} \mathbf{H}(j\omega); \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arg} \mathbf{H}(j\omega)$$

— **частотные характеристики** системы соответственно: **вещественная частотная, мнимая частотная, амплитудная частотная и фазовая частотная характеристики**.

Эти характеристики взаимосвязаны:

$$\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{A}(\omega)\cos\varphi(\omega); \quad \mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{A}(\omega)\sin\varphi(\omega);$$

$$\mathbf{A}(\omega) = (\mathbf{P}^2(\omega) + \mathbf{Q}^2(\omega))^{0,5}; \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(\mathbf{Q}(\omega)/\mathbf{P}(\omega)).$$

Использование частотных характеристик удобнее выполнять в логарифмическом масштабе, откладывая по оси абсцисс  $\lg \omega$ , по оси ординат — величину  $20\lg \mathbf{A}(\omega)$  для амплитудной и величину  $\varphi(\omega)$  для фазовой характеристики.

Полученные таким образом характеристики (H.W. Bode, 1945)

$$\mathbf{L}(\omega) = 20\lg \mathbf{A}(\omega) = 20\lg |\mathbf{H}(j\omega)|, \quad \varphi = \varphi(\lg \omega)$$

называются соответственно **логарифмической амплитудно-частотной (лачх)** и **логарифмической фазочастотной (лфчх)** характеристикой.

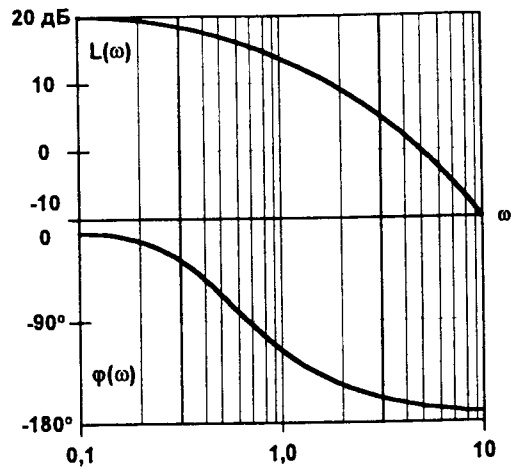
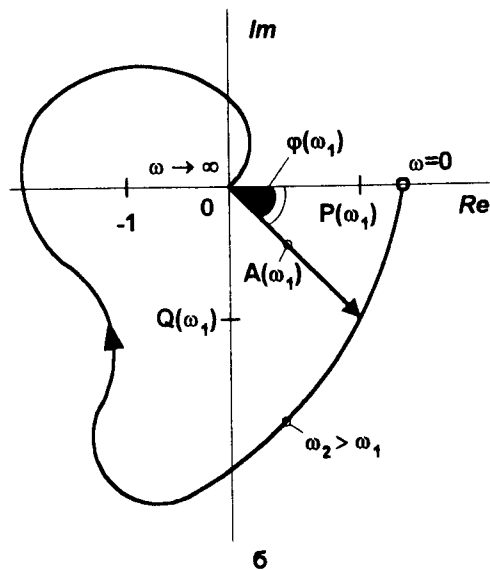


РИС. 55

Отрезок логарифмической шкалы (рис. 55, а), соответствующий увеличению частоты в 10 раз, называется **декадой**, а отрезок, соответствующий увеличению частоты в 2 раза, называется **октавой**. Единица измерения  $L(\omega)$  — **децибелы**, единица измерения  $\varphi(\omega)$  — **градусы**.



Частотная характеристика при фиксированной частоте изображается вектором на комплексной плоскости (рис. 55, б). При изменении частоты от нуля до бесконечности конец вектора опишет на комплексной плоскости кривую  $\{H(j\omega), \omega: 0 \leq \omega < \infty\}$ , которая называется **годографом частотной характеристики** (Н. Н.

quist, 1932), или **амплитудно-фазовой характеристикой** системы, или **кривой Найквиста**.

Обычно рассматривают две группы частотных характеристик: для замкнутой системы  $H(j\omega)$ , представленной, например, основной структурой (см. рис. 22), и для разомкнутой части этой системы  $W(j\omega) = W_1(j\omega)W_0(j\omega)$ . Частотные характеристики замкну-

той системы могут быть найдены через частотные характеристики разомкнутой системы графически с помощью **номограмм замыкания** [5] или аналитически, используя выражение

$$H(j\omega) = W(j\omega)/(1 + W(j\omega)).$$

Передаточная функция системы  $W(s)$  обычно представляется дробно-рациональным выражением

$$W(s) = B_m(s)/A_n(s),$$

где  $B_m(s) = b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m$ ;

$A_n(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$  — полиномы числителя и знаменателя соответственно.

Для реально существующих систем  $m \leq n$ .

Корни полинома числителя  $B_m(s) = 0$  называют **нулями передаточной функции** системы, корни полинома знаменателя  $A_n(s) = 0$  — **полюсами передаточной функции**. Полином  $A_n(s)$  является **характеристическим многочленом** системы, поэтому полюса передаточной функции и характеристические числа системы совпадают.

Полюсы и нули в общем случае комплексные величины. Говорят, что полюс или нуль — **левый**, если он расположен в левой полуплоскости, вещественная часть такого полюса или нуля отрицательна; **правый** — если его вещественная часть положительна и он располагается в правой полуплоскости; **нейтральный** — если он расположен на мнимой оси, его вещественная часть равна нулю.

## 5.5. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

При описании автоматических систем часто оказывается целесообразным расчленение системы на элементы не по функциональному назначению, а по динамическим свойствам. При этом может оказаться, что различные по функциональному назначению элементы представляются одним и тем же набором

динамических звеньев, и обратно сходные по назначению элементы представляются различными динамическими звеньями. Такой подход позволяет изучать динамические свойства системы по динамическим свойствам ограниченного набора базовых динамических звеньев.

Передаточная функция стационарной линейной системы является отношением полиномов с действительными коэффициентами. Каждый такой полином представляется в виде произведения квадратных трехчленов, соответствующих парам комплексных сопряженных корней полинома, линейных двучленов, соответствующих действительным корням и постоянной. Поэтому произвольная передаточная функция может быть представлена в обобщенно-условном виде:

$$H(s) = ks^v \Pi(s+a)\Pi(s^2+bs+c)/(s^u \Pi(s+a)\Pi(s^2+bs+c)).$$

Такое представление позволяет рассматривать произвольный функциональный элемент с передаточной функцией  $H(s)$  в виде последовательного соединения базовых звеньев. Таких звеньев семь. Придадим их передаточным функциям типовой вид: **пропорциональное**  $k$ , **дифференцирующее**  $s$ , **интегрирующее**  $1/s$ , **инерционное**  $k/(Ts+1)$ , **форсирующее**  $k(Ts+1)$ , **колебательное**  $k/(T^2s^2+2\zeta Ts+1)$ , **дважды форсирующее**  $k(T^2s^2+2\zeta Ts+1)$ .

Рассмотрим динамические характеристики типовых звеньев.

- **Пропорциональное звено.** Модель звена  $y = ku$ .

Реальными примерами такого звена могут быть редуктор, операционный усилитель, рычаг, ток и напряжение в пассивной электрической  $RR$ -цепи, давление и поток жидкости в трубопроводе.

Временные характеристики:

$$k(t) = k\delta(t), \quad h(t) = k1(t).$$

Частотные характеристики:

$$W(j\omega) = k; \quad P(\omega) = k; \quad Q(\omega) = 0;$$

$$A(\omega) = k; \quad \varphi(\omega) = 0; \quad L(\omega) = 20\lg k.$$

Годограф — точка на действительной оси.

- **Интегрирующее звено.** Модель звена  $y' = ku(t)$ ,  $y(0) = 0$ . Реальными примерами такого звена могут быть

материальная точка, движущаяся под действием силы (вход — сила, выход — скорость); вращающееся тело (вход — угловая частота, выход — угол поворота); резервуар с жидкостью (вход — дебит, выход — уровень жидкости); двигатель постоянного тока с независимым возбуждением (вход — напряжение на якоре, выход — угол поворота вала); поршневой серводвигатель (вход — поток масла, выход — перемещение поршня), операционный усилитель с емкостью в обратной связи.

Передаточная функция с учетом параметра:

$$W(s; k) = k/s.$$

Временные характеристики:

$$k(t) = k; \quad h(t) = kt.$$

Частотные характеристики:

$$W(j\omega) = -jk/\omega; \quad P(\omega) = 0; \quad Q(\omega) = -k/\omega;$$

$$A(\omega) = k/\omega; \quad \varphi(\omega) = -\pi/2;$$

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg \omega.$$

Годограф — отрицательная полупрямая на мнимой оси, при изменении частоты от нуля до бесконечности конец вектора  $W(j\omega)$  перемещается по мнимой оси от минус бесконечности до нуля. Характеристики интегрирующего звена представлены на рис. 56, а, б, в.

- **Дифференцирующее звено.** Модель звена  $y = ku'(t)$ .

Реальных примеров такого звена нет.

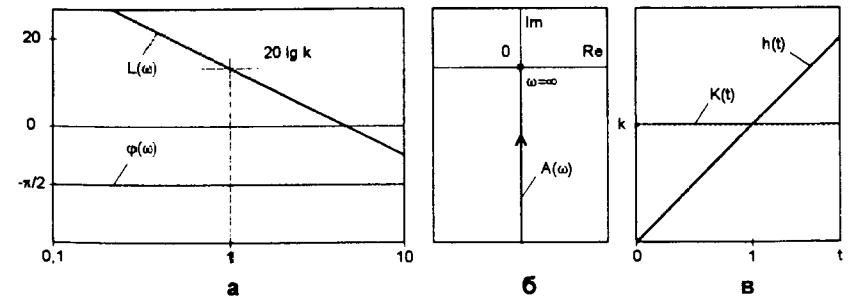


РИС. 56



- **Дифференцирующее звено** — идеальное, физически нереализуемое.

Передаточная функция с учетом параметра:

$$W(s; k) = ks,$$

где  $k$  — передаточный коэффициент.

Временные характеристики:

$$k(t) = k\delta^2(t); \quad h(t) = k\delta(t).$$

Частотные характеристики:

$$W(j\omega) = jk\omega; \quad P(\omega) = 0; \quad Q(\omega) = k\omega;$$

$$A(\omega) = k\omega; \quad \varphi(\omega) = \pi/2;$$

$$L(\omega) = 20\lg k + 20\lg \omega.$$

Годограф — положительная полупрямая на мнимой оси, при изменении частоты от нуля до бесконечности конец вектора  $W(j\omega)$  перемещается по мнимой оси от нуля до плюс бесконечности.

- **Инерционное звено.** Модель звена  $Tu' + u = ku(t)$ ,  $u(0) = 0$ . Реальными примерами такого звена могут быть материальная точка, движущаяся под действием силы в сопротивляющейся среде (вход — сила, выход — скорость); резервуар с гидравлическим сопротивлением на входе (вход — давление в магистрали, выход — давление внутри резервуара); двигатель постоянного тока с независимым возбуждением и ощутимой индуктивностью якорной цепи (вход — ток в якорной цепи, выход — частота вращения); пассивная RC-цепь (вход — напряжение питания, выход — напряжение на емкости); операционный усилитель с параллельными емкостью и резистором в обратной связи.

Передаточная функция с учетом параметров:

$$W(s; k, T) = k/(Ts + 1),$$

где  $k$  — передаточный коэффициент;

$T$  — постоянная времени звена.

Временные характеристики:

$$k(t) = k/T \exp(-t/T); \quad h(t) = k(1 - \exp(-t/T)).$$

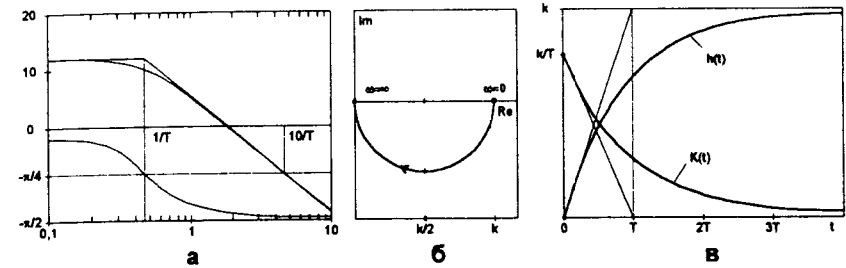


РИС. 57

Частотные характеристики:

$$W(j\omega) = k/(1 + jT\omega); \quad P(\omega) = k/(\Gamma^2 \omega^2 + 1);$$

$$Q(\omega) = -kT\omega/(\Gamma^2 \omega^2 + 1);$$

$$A(\omega) = k/(\Gamma^2 \omega^2 + 1)^{0.5}; \quad \varphi(\omega) = -\text{arctg} T\omega;$$

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg (\Gamma^2 \omega^2 + 1)^{0.5}.$$

Аппроксимация этой кривой имеет вид

$$L^*(\omega) = 20\lg k \quad \text{при } \omega \ll T;$$

$$L^*(\omega) = 20\lg k - 20\lg T\omega \quad \text{при } \omega \gg T.$$

Годограф - полуокружность с центром в точке  $k/2$ , которая начинается на действительной оси в точке  $k$  и заканчивается при бесконечной частоте в начале координат. Характеристики инерционного звена представлены на рис. 57, а, б, в.

- **Форсирующее звено.** Модель  $y = k(Tu'(t) + u(t))$ .

Реальных примеров такого звена нет. Форсирующее звено — идеальное, физически нереализуемое.

Передаточная функция с учетом параметров:

$$W(s; k, T) = k(Ts + 1),$$

где  $k$  — передаточный коэффициент;

$T$  — постоянная времени звена.

Временные характеристики:

$$k(t) = k(T\delta'(t) + \delta(t)); \quad h(t) = k(T\delta(t) + 1(t)).$$

Частотные характеристики:

$$W(j\omega) = k(1 + jT\omega); \quad P(\omega) = k; \quad Q(\omega) = kT\omega;$$

$$A(\omega) = k(T^2\omega^2 + 1)^{0,5}; \quad \varphi(\omega) = \text{arctg } T\omega;$$

$$L(\omega) = 20\lg k + 20\lg (T^2\omega^2 + 1)^{0,5}.$$

Аппроксимация этой кривой имеет вид

$$L^*(\omega) = 20\lg k \quad \text{при } \omega \ll T;$$

$$L^*(\omega) = 20\lg k + 20\lg T\omega \quad \text{при } \omega \gg T.$$

Годограф — полупрямая, которая начинается на действительной оси в точке  $k$  и уходит с увеличением частоты в бесконечность параллельно мнимой оси. Фазовое упреждение входного сигнала с ростом частоты стремится к  $90^\circ$ .

• **Колебательное звено.** Модель звена:

$$T^2 y'' + 2\zeta T y' + y = ku(t), \quad y'(0) = y(0) = 0.$$

Реальными примерами такого звена могут быть две емкости, способные запасать энергию или вещество и взаимно обмениваться их запасами, например сообщающиеся сосуды, соединенные через гидросопротивление; колебание массы на пружине с демпфером; двигатель постоянного тока с независимым возбуждением и ощутимой индуктивностью якорной цепи (вход — напряжение на якоре, выход — угол поворота вала); пассивная RLC-цепь (вход — напряжение питания, выход — напряжение на емкости).

Передаточная функция с учетом параметров:

$$W(s; k, T, \zeta) = k/(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1),$$

где  $k$  — передаточный коэффициент;  
 $T$  — постоянная времени звена;  
 $\zeta$  — относительный коэффициент затухания.

Временные характеристики:

$$k(t) = k/(T^2 \omega_1) \exp(-\alpha t) \sin \omega_1 t;$$

$$h(t) = k(1 - \omega_0/\omega_1 \exp(-\alpha t) \sin(\omega_1 t + \theta)),$$

где  $\alpha = \zeta/T$  — коэффициент затухания;  
 $\omega_1 = \omega_0 (1 - \zeta^2)^{0,5}$  — собственная частота колебаний;

$\omega_0 = 1/T$  — резонансная частота колебаний;  
 $\theta = \text{arctg } \omega_1/\alpha$ .

Частотные характеристики:

$$W(j\omega) = k/((1 - T^2\omega^2) + j2\zeta T\omega);$$

$$P(\omega) = k(1 - T^2\omega^2)/((1 - T^2\omega^2)^2 - 4\zeta^2 T^2\omega^2);$$

$$Q(\omega) = -k2\zeta T\omega/((1 - T^2\omega^2)^2 - 4\zeta^2 T^2\omega^2);$$

$$A(\omega) = k/((1 - T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2\omega^2)^{0,5};$$

$$\varphi(\omega) = -\text{arctg } 2\zeta T\omega/(1 - T^2\omega^2);$$

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg ((1 - T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2\omega^2)^{0,5}.$$

Аппроксимация этого семейства кривых имеет вид

$$L^*(\omega) = 20\lg k \quad \text{при } \omega \ll T;$$

$$L^*(\omega) = 20\lg k - 40\lg T\omega \quad \text{при } \omega \gg T.$$

Максимальная погрешность аппроксимации имеет место на сопрягающей частоте  $1/T$  и зависит от величины  $\zeta$ . Например, для  $\zeta = 0,7$  и  $\zeta = 0,1$  погрешность составляет соответственно 3 дБ и 14 дБ.

Годограф начинается на действительной оси в точке  $k$ , располагается в двух квадрантах, пересекает на резонансной частоте  $\omega_0 = 1/T$  мнимую ось в точке  $-k/2\zeta$  и заканчивается при бесконечной частоте в начале координат. Характеристики колебательного звена представлены на рис. 58, а, б, в.

Частный случай колебательного звена при  $\zeta = 0$  называют **консервативным** звеном. Для этого звена резонансная частота совпадает с собственной:  $\omega_0 = \omega_1$ .

Передаточная функция с учетом параметров:

$$W(s; k, T) = k/(T^2 s^2 + 1).$$

Временные характеристики:

$$k(t) = k/T \sin \omega_0 t;$$

$$h(t) = k(1 - \cos \omega_0 t).$$

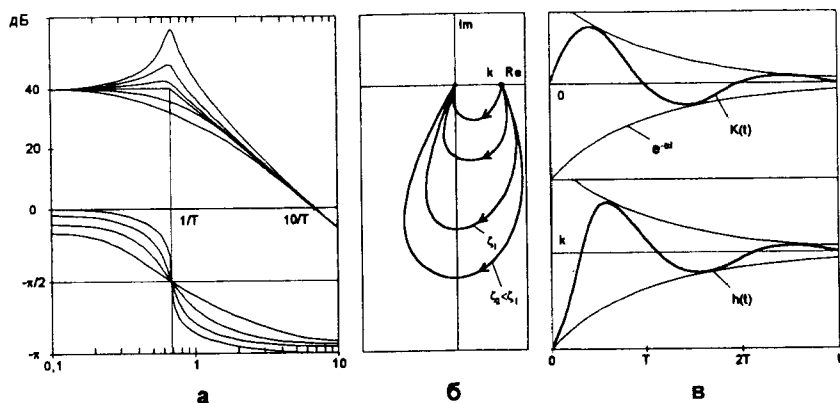


РИС. 58                      дБ

Частотные характеристики:

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) &= k/(1 - T^2\omega^2); \\
 P(\omega) &= k/(1 - T^2\omega^2); \\
 Q(\omega) &= 0; \\
 A(\omega) &= k/(1 - T^2\omega^2); \\
 \varphi(\omega) &= 0 \quad \text{при } \omega < \omega_0; \\
 \varphi(\omega) &= -\pi \quad \text{при } \omega > \omega_0.
 \end{aligned}$$

Годограф начинается на действительной оси в точке  $k$ , целиком располагается на действительной оси, имеет разрыв, на резонансной частоте  $\omega_0 = 1/T$  уходит в бесконечность и при дальнейшем увеличении частоты возвращается по отрицательной части действительной оси в начало координат.

• **Форсирующее звено второго порядка.** Модель звена:  $y = k(T^2 u''(t) + 2\zeta T u'(t) + u(t))$ .

Реальных примеров такого звена нет. Форсирующее звено второго порядка — физически нереализуемое, идеальное.

Передаточная функция с учетом параметров:

$$W(s; k, T, \zeta) = k(T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1),$$

Временная характеристика:

$$h(t) = k(T^2 \delta'(t) + 2\zeta T \delta(t) + 1(t)).$$

Частотные характеристики:

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) &= k((1 - T^2\omega^2) + j2\zeta T\omega); \\
 P(\omega) &= k(1 - T^2\omega^2); \\
 Q(\omega) &= k2\zeta T\omega; \\
 A(\omega) &= k((1 - T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2\omega^2)^{0,5}; \\
 \varphi(\omega) &= \text{arctg } 2\zeta T\omega/(1 - T^2\omega^2); \\
 L(\omega) &= 20\lg k + 20\lg ((1 - T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2\omega^2)^{0,5}.
 \end{aligned}$$

Аппроксимация этого семейства кривых имеет вид

$$L^*(\omega) = 20\lg k \quad \text{при } \omega \ll T;$$

$$L^*(\omega) = 20\lg k + 40\lg T\omega \quad \text{при } \omega \gg T.$$

Годограф — парабола, которая начинается на действительной оси в точке  $k$  и уходит с увеличением частоты в бесконечность во втором квадранте, пересекая мнимую ось на частоте  $1/T$  в точке  $2k\zeta$ . Фазовое упреждение входного сигнала с ростом частоты приближается к  $180^\circ$ .

К типовым звеньям относят **звено запаздывания**, передаточная функция которого не имеет дробно-рационального представления, являясь трансцендентным выражением. Модель звена:  $y(t) = u(t - \tau)$ . Реальный пример такого звена — конвейер, трубопровод (вход — входной поток, выход — выходной поток), длинные материальные линии.

Передаточная функция с учетом параметра:

$$W(s; \tau) = \exp(-s\tau).$$

Временные характеристики:

$$k(t) = \delta(t - \tau);$$

$$h(t) = 1(t - \tau).$$

Частотные характеристики:

$$W(j\omega) = \exp(-j\omega\tau);$$

$$P(\omega) = \cos \omega\tau;$$

$$Q(\omega) = \sin \omega\tau;$$

$$A(\omega) = 1; \quad j(\omega) = -\omega\tau;$$

$$L(\omega) = 0.$$

Годограф — окружность единичного радиуса, которая начинается на действительной оси в точке  $k$  и бесконечно периодически повторяется.

К группе типовых звеньев относятся так называемые **неминимально-фазовые звенья**. Это звенья первого и второго порядка, у которых хотя бы один полюс — правый или хотя бы один нуль — левый, например:

$$W(s) = k/(Ts - 1);$$

$$W(s) = k/(T^2s^2 - 2\zeta Ts + 1);$$

$$W(s) = k/(-T^2s^2 + 2\zeta Ts - 1);$$

$$W(s) = k(Ts - 1);$$

$$W(s) = k(T^2s^2 - 2\zeta Ts + 1);$$

$$W(s) = k(T^2s^2 - 2\zeta Ts - 1).$$

Основная особенность таких звеньев — большой фазовый сдвиг по сравнению со звеньями, имеющими такую же амплитудно-частотную характеристику. Действительно, если для звена с  $W(s) = k/(Ts + 1)$  фазовая частотная характеристика  $\varphi(\omega) = -\text{arctg } T\omega$ , то для звена вида  $W(s) = k/(Ts - 1)$  фазовая частотная характеристика  $\varphi(\omega) = -\pi + \text{arctg } T\omega$ . Частотный годограф этого звена — полуокружность, которая начинается на действительной оси в точке  $-1$  и заканчивается в начале координат, находясь в третьем квадранте.

• **Динамические характеристики соединений типовых звеньев.** Пусть в частном случае два типовых звена соединены последовательно. Амплитудная и фазовая частотные характеристики такой пары определяются из частотных характеристик звеньев:

$$H(j\omega) = W_1(j\omega) W_2(j\omega) = A_1(\omega)A_2(\omega) \exp[j(\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega))];$$

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega);$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega).$$

Очевидно обобщение этого результата на случай произвольного числа последовательно соединенных звеньев.

Для построения логарифмических частотных характеристик соединения используются асимптотические логарифмические частотные характеристики звеньев с последующим внесением поправок при необходимости.

На первом шаге процедуры построения логарифмической амплитудной характеристики в точке  $\omega = 1$  откладывается ордината  $20\lg k$ , где  $k$  — общий коэффициент усиления всего соединения. Через полученную точку проводится низкочастотная асимптота с наклоном  $-20(\mu - \nu)$  дБ/дек., где  $\mu$  — число интегрирующих звеньев;  $\nu$  — число дифференцирующих звеньев в соединении.

На втором шаге определяются сопрягающие частоты асимптотических характеристик звеньев, нумеруются в порядке возрастания и расставляются по оси абсцисс.

На третьем шаге низкочастотная асимптота продолжается до первой сопрягающей частоты. В этой точке наклон характеристики меняется в зависимости от типа звена, для которого эта частота — сопрягающая. Полученная прямая продолжается до следующей отмеченной сопрягающей частоты, в которой вновь меняется наклон. Процесс изменения наклона отрезков характеристики заканчивается после последней сопрягающей частоты построением высокочастотной асимптоты характеристики соединения. Процедура построения завершается сглаживанием характеристики на сопрягающих частотах колебательных и дважды форсирующих звеньев. Аналогично строится логарифмическая фазочастотная характеристика.

Частотные характеристики параллельного соединения звеньев и соединения с обратной связью удобно строить с помощью специальных номограмм [5].

## Примеры

1. Частотный годограф объекта второго порядка, у которого два левых комплексно-сопряженных полюса и один нуль в начале координат, имеет вид окружности, которая проходит через начало координат с центром на действительной полуоси.

2. Построим частотные характеристики системы, передаточная функция разомкнутой части которой имеет вид

$$W(s) = k(T_1s + 1)/(s(T_2s + 1)(T_3s^2 + 2\zeta T_3s + 1)),$$

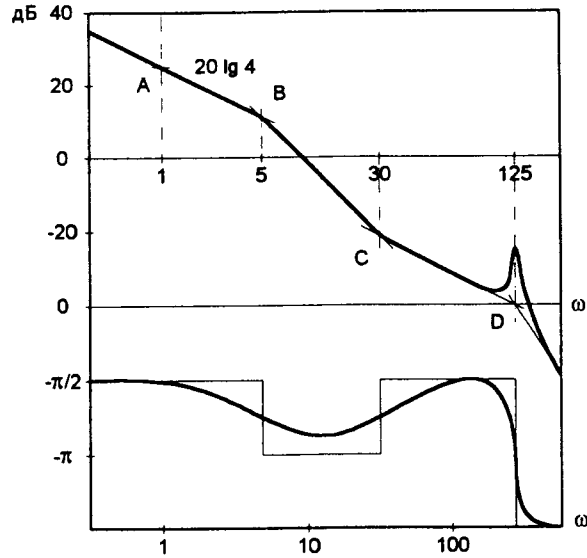


РИС. 59

где  $k = 4$ ;  $T_1 = 0,033$ ;  $T_2 = 0,2$ ;  $T_3 = 0,008$ ;  $\zeta = 0,1$ .

Находим сопрягающие частоты в порядке возрастания:  $\omega_2 = 5$ ,  $\omega_1 = 30$ ,  $\omega_3 = 125$ . На частоте  $\omega = 1$  откладываем ординату  $20 \lg k = 12,04$ . В этой точке, называемой А, проводим низкочастотную асимптоту с наклоном  $-20$  дБ/дек., в точке В наклон изменяется до  $-40$  дБ/дек., в точке С наклон изменяется до  $-20$  дБ/дек., в точке D наклон становится  $-60$  дБ/дек. В окрестности сопрягающей частоты  $\omega_3$ , которая отвечает колебательному звену, внесены поправки, соответствующие  $\zeta = 0,1$ .

Фазовая характеристика построена суммированием фазовых характеристик составляющих звеньев. Результат построения приведен на рис. 59.

## 5.6. УПРАЖНЕНИЯ

1. Управляема ли система двух связанных маятников одной длины (см. рис. 29, б), которые управляются двумя равными и противоположно направленными силами, приложенными к массам? Модель движения этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \zeta'' + a^2(\zeta' - \sigma') + \omega^2 \zeta &= u; \\ \sigma'' + a^2(\sigma' - \zeta') + \omega^2 \sigma &= -u. \end{aligned}$$

2. Подобрать матрицы А, В, С для системы второго порядка так, чтобы она была: а) управляема и наблюдаема; б) управляема, но не наблюдаема; в) неуправляема, но наблюдаема; г) неуправляема и ненаблюдаема.

3. Для системы  $\Sigma^{(n)}$ : А, В, С, вполне наблюдаемой со скалярным входом и выходом, для которой  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ , найти вектор начального состояния, используя измерения выходной и входной переменных.

4. Найти матричные временные и частотные характеристики, а также переходной процесс в системе, заданной матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = (0 \quad 1 \quad 1).$$

5. Найти характеристическое уравнение, определить характеристические числа и дать суждение об устойчивости линейной модели системы (2.2; примеры 6, 7).

6. Построить временные и частотные характеристики неминимально-фазовых звеньев первого и второго порядка. Построить временные и частотные характеристики звена с передаточной функцией:

$$W(s) = k(T_1 s - 1)/(T_2 s + 1).$$

7. Построить временные и частотные характеристики соединений типовых звеньев и звена запаздывания.

8. Построить временные и частотные характеристики соединения типовых звеньев: пропорционального и дифференцирующего; пропорционального и интегрирующего; пропорционального, интегрирующего и дифференцирующего.

## 6 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

---

---

9. Построить, используя номограммы замыкания, частотные характеристики звена с передаточной функцией  $W_1(s) = 200/((0,08s + 1)(0,5s + 1))$ , охваченного обратной связью с  $W_2(s) = 0,2s/(0,2s + 1)$ .

10. Построить логарифмические частотные характеристики системы, передаточная функция которой

$$W(s) = k(T_3^2 s^2 + 2\zeta T_3 s + 1)/(s^2(T_1 s + 1)(T_2 s - 1)(T_4 s + 1)),$$

если  $k = 30$ ;  $T_1 = 20$ ;  $T_2 = 8$ ;  $T_3 = 0,8$ ;  $T_4 = 0,05$ ;  $\zeta = 0,2$ .

Построить частотный годограф этой системы.

*Метод Ляпунова для оценки устойчивости — Алгебраические критерии устойчивости — Частотные критерии устойчивости — Анализ параметрической устойчивости — Упражнения.*

### 6.1. МЕТОД ЛЯПУНОВА ДЛЯ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ

Автоматическая система должна быть устойчивой! Это свойство является необходимым. Математическое понятие устойчивости линейной системы, введенное в 5.3, может быть сведено к пусть недостаточно строгому, но вполне ясному: "линейная система устойчива, когда ее реакция на любое ограниченное воздействие является ограниченной".

#### Теорема

*Линейная система устойчива тогда и только тогда, когда ее импульсная характеристика абсолютно интегрируема.*

Покажем справедливость этого утверждения, чтобы затем использовать его для доказательства теоремы Ляпунова об устойчивости линейных систем.

Пусть на вход устойчивой системы действует ограниченный сигнал:

$$|u(t)| \leq U < \infty, \quad \forall t \geq 0,$$

поскольку система устойчивая, ее реакция на этот сигнал будет ограниченной:

$$\forall t \geq 0, \quad |y(t)| \leq \int_0^t |k(\tau)u(t-\tau)|d\tau \leq U \int_0^t |k(\tau)|d\tau < \infty.$$

Значит,

$$\int_0^{\infty} |k(\tau)|d\tau < \infty,$$

что доказывает достаточность утверждения. Необходимость докажем от противного. Положим, утверждение леммы неверно и

$$\int_0^{\infty} |k(\tau)|d\tau = \infty.$$

Поскольку ограниченное входное воздействие произвольное, пусть оно принимает вид выражения  $u(t-\tau) = \text{sgn } k(\tau)$ , но тогда

$$y(t) = \int_0^t k(\tau) \text{sgn } k(\tau) d\tau = \int_0^t |k(\tau)| d\tau.$$

Отсюда следует, что при  $t \rightarrow \infty$

$$\lim y(t) = \int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau = \infty.$$

Это противоречие с условием устойчивости системы доказывает справедливость утверждения теоремы.

Далее, поскольку  $H(s) = \mathcal{L}[k(t)]$ , то

$$|H(s)| \leq \int_0^{\infty} |k(t)| |\exp(-st)| dt.$$

Переменная —  $s$ -комплексная. Если точка  $s$  лежит в правой полуплоскости, то для нее  $|\exp(-st)| \leq 1$  и тогда для устойчивой системы согласно теореме  $|H(s)| < \infty$ .

Условие  $|H(s)| < \infty$ ,  $\text{Re } s \geq 0$  может быть выполнено тогда и только тогда, когда у функции  $H(s)$  нет полюсов в правой полуплоскости и на мнимой оси. Полюса передаточной функции суть

характеристические корни системы. Значит, для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все характеристические корни системы были левыми!

Правила, по которым можно судить об устойчивости системы, не решая характеристического уравнения, называют **критериями устойчивости**.

## 6.2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Впервые для частного случая  $n = 3$  критерий устойчивости был сформулирован И.А. Вышнеградским при анализе устойчивости паровой машины с регулятором. В общем виде алгебраический критерий устойчивости линейной системы впервые сформулировал Э. Раус, а затем А. Гурвиц. Оба критерия эквивалентны, хотя и различны по форме.

### Критерий Гурвица (А. Hurwitz, 1895)

Рассмотрим характеристический полином замкнутой системы:

$$\det(\lambda E - A) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n, \quad a_0 > 0,$$

составим для него матрицу Гурвица размером  $n \times n$ :

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

- Для того чтобы все корни характеристического многочлена замкнутой системы имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы Гурвица были положительными.

### Критерий Рауса (E.J. Routh, 1877)

Составим по коэффициентам характеристического уравнения таблицу Рауса

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_3 & c_5 & \dots \\ c_0 & c_2 & c_4 & \dots \\ b_1 & b_3 & b_5 & \dots \\ b_0 & b_2 & b_4 & \dots \\ a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \end{pmatrix}$$

по следующему правилу: элементы двух последних строк являются коэффициентами характеристического многочлена системы, элементы двух предыдущих строк таблицы определяются формулами

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \quad b_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ a_0 & a_4 \end{vmatrix}; \quad \dots; \quad b_{2k} = \begin{vmatrix} a_1 & a_{2k+3} \\ a_0 & a_{2k+2} \end{vmatrix};$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} b_0 & b_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \quad b_3 = \begin{vmatrix} b_0 & b_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}; \quad \dots; \quad b_{2k+1} = \begin{vmatrix} b_0 & b_{2k+2} \\ a_1 & a_{2k+3} \end{vmatrix}.$$

Элементы двух следующих строк таблицы  $c_k$  определяются теми же формулами, в которых выполнена замена элементов  $a, b$  на элементы  $b, c$  соответственно.

• Для того чтобы все корни характеристического многочлена замкнутой системы имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все элементы первого столбца таблицы Рауса были положительными.

### Критерий матричный (В.И. Зубов, 1959)

Рассмотрим для системы, заданной внутренней моделью с матрицей состояния  $A$ , вспомогательную матрицу вида

$$R = E - 2(E - A)^{-1}.$$

• Для того чтобы система с матрицей состояния  $A$  была асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы матрица  $R^r$  стремилась к нулевой матрице с ростом числа  $r$ .

### Примеры

1. Для системы третьего порядка условия асимптотической устойчивости по критерию Гурвица принимают вид

$$a_i > 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

2. Система, заданная матрицей состояния:

$$\begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ \beta & -1 & \alpha \\ 0 & \beta & -1 \end{pmatrix},$$

где  $\alpha, \beta$  — параметры системы, имеет характеристический многочлен:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + (3 - 2\alpha\beta)\lambda + (1 - 2\alpha\beta).$$

Поэтому для асимптотической устойчивости этой системы, согласно критерию Гурвица достаточно, чтобы  $\alpha\beta < 0,5$ .

3. Для системы четвертого порядка таблица Рауса принимает вид

$$\begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ b_0 & b_2 & 0 \\ a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix},$$

где  $b_0 = a_1 a_2 - a_0 a_3$ ;  $b_2 = a_1 a_4$ ;  $b_1 = b_0 a_3 - b_2 a_1$ ;  $c_0 = b_1 b_2$ .

Условия асимптотической устойчивости этой системы:

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_4 > 0; \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$

$$a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 b_1 > 0.$$



4. Используя алгебраические критерии, можно показать, что при  $k > 0,6$  замкнутая системы управления, для которой известна передаточная функция разомкнутой части

$$W(s; k) = k(s + 2)(s + 3)/(s^3 + s^2 + 3s + 6),$$

будет асимптотически устойчивой.

5. Система, заданная матрицей состояния

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},$$

является, согласно матричному критерию, асимптотически устойчивой, поскольку для  $\gamma \geq 8$  все члены матриц  $R^r$  с точностью до 0,08 равны нулю.

### 6.3. ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

**Критерий Михайлова** (А.В. Михайлов, 1938)

Рассмотрим характеристический полином замкнутой системы:

$$A(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n, \quad a_0 > 0.$$

Кривая  $\Phi(\omega) = A(\lambda)|_{\lambda=j\omega}$ , где  $\omega \geq 0$  — действительный параметр, называется **годографом Михайлова** многочлена  $A(\lambda)$ .

• **Замкнутая система порядка  $n$  будет асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда годограф Михайлова при изменении частоты  $\omega$  от нуля до бесконечности, начиная с действительной оси, обходит последовательно в положительном направлении  $n$  квадрантов.**

**Критерий Найквиста** (Н. Nyquist, 1932)

Критерий позволяет определять устойчивость замкнутой системы по частотной характеристике  $W(j\omega)$  ее разомкнутой части.

Различают три случая применения критерия.

1. Система в разомкнутом состоянии асимптотически устойчива.

• **После замыкания система будет асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда годограф Найквиста  $W(j\omega)$  при изменении частоты  $\omega$  от нуля до бесконечности не охватывает контрольной точки  $(-1, j0)$ .**

2. Система в разомкнутом состоянии устойчива, но не асимптотически.

Характеристический полином разомкнутой части имеет нулевые и чисто мнимые корни, остальные корни — левые. Если нулевых корней  $\nu$ , то годограф  $W(j\omega)$  доопределяется при  $\omega = 0$  дугой бесконечно большого радиуса, начиная с действительной оси, раствором  $-0,5\nu\pi$ . Если чисто мнимых корней  $\mu$ , то годограф доопределяется на частоте разрыва дугой бесконечно большого радиуса, начиная с действительной оси, раствором  $-\mu\pi$ .

• **После замыкания система будет асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда годограф Найквиста  $W(j\omega)$ , дополненный на частотах разрыва дугами бесконечно большого радиуса, при изменении частоты  $\omega$  от нуля до бесконечности не охватывает контрольной точки  $(-1, j0)$ .**

3. Система в разомкнутом состоянии неустойчива и имеет  $m$  правых полюсов.

• **После замыкания система будет асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда годограф Найквиста  $W(j\omega)$  при изменении частоты  $\omega$  от нуля до бесконечности охватывает контрольную точку  $(-1, j0)$  в положительном направлении ровно  $m/2$  раз.**

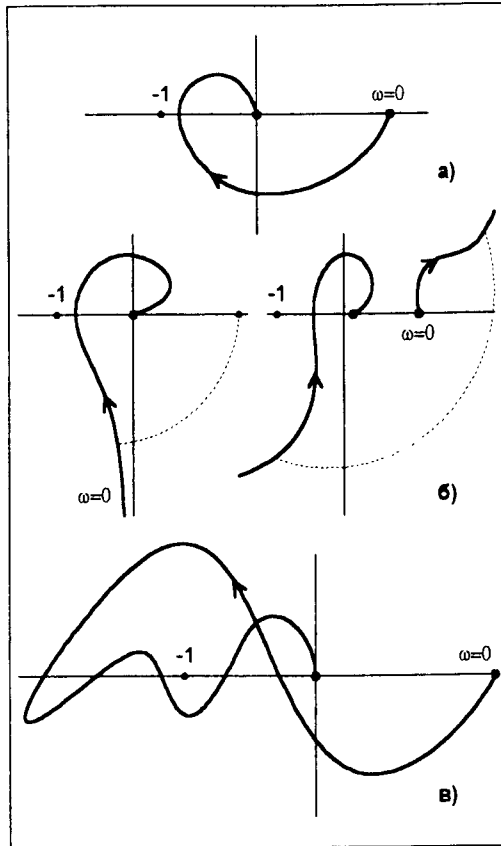
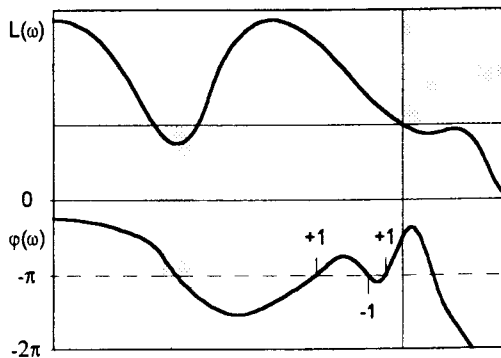


РИС. 60

На рис. 60, а, б, в представлены примеры годографов Найквиста для трех указанных случаев.

**Логарифмический критерий Боде**  
(А. Боде, 1948)

Будем считать **"+1-пересечением"** логарифмической фазовой характеристикой уровня  $-\pi$  снизу вверх и **"-1-пересечением"** — пересечение фазовой характеристикой уровня  $-\pi$  сверху вниз при положительном значении логарифмической амплитудной характеристики.



• Если разомкнутая система имеет  $m$  правых полюсов, то для асимптотической устойчивости замкнутой системы необходимо и доста-

РИС. 61

точно, чтобы на интервале частот, когда  $L(\omega) > 0$ , число пересечений фазовой характеристикой уровня  $-\pi$  снизу вверх превышало число пересечений сверху вниз на  $m/2$ .

На рис. 61 показаны характеристики, соответствующие случаю, изображенному на рис. 60, в.

В частном случае, когда система в разомкнутом состоянии асимптотически устойчива, для асимптотической устойчивости системы после замыкания необходимо и достаточно, чтобы на интервале частот, где  $L(\omega) > 0$ , фазовая характеристика совершила одинаковое число пересечений уровня  $-\pi$  сверху вниз и снизу вверх.

**Примеры**

1. Характеристический многочлен замкнутой системы имеет вид

$$A(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1,$$

поэтому годограф Михайлова задается функциями

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A(j\omega) &= \omega^4 - 3\omega^2 + 1; \\ \operatorname{Im} A(j\omega) &= -2\omega^3 - 2\omega. \end{aligned}$$

При изменении частоты  $\omega$  от нуля до бесконечности годограф последовательно проходит через четыре квадранта, что доказывает асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

2. Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(s) = 20(0,02s + 1)/(0,05s + 1)(0,01s + 1),$$

поэтому годограф Найквиста задается функциями

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} W(j\omega) &= 20(0,002\omega^2 + 1)/(1 + 0,0025\omega^2)(1 + 0,0001\omega^2); \\ \operatorname{Im} W(j\omega) &= 0,2\omega/(1 - 24 \cdot 10^{-4}\omega^2 - 25 \cdot 10^{-8}\omega^4). \end{aligned}$$

Передаточная функция имеет пару мнимых корней  $\pm 20j$ , поэтому годограф терпит разрыв на частоте  $20 \text{ с}^{-1}$ . После пополнения годографа дугой бесконечно большого радиуса раствором  $-\pi$  обнаруживаем, что контрольная точка не охватывается годо-

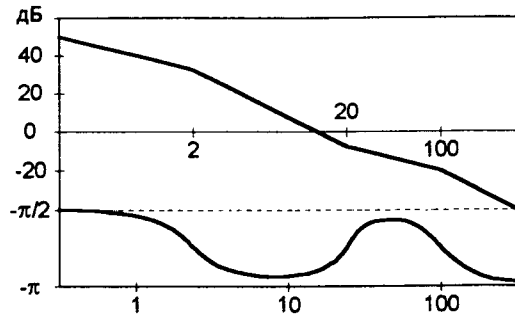


РИС. 62

графом. Система после замыкания будет асимптотически устойчивой.

3. На рис. 62 приведены логарифмические частотные

характеристики системы, разомкнутая часть которой имеет передаточную функцию:

$$W(s) = 100(0,05s + 1)/((0,5s + 1)(0,01s + 1)).$$

В разомкнутом состоянии система асимптотически устойчива, поскольку ее полюса левые:  $-2$ ,  $-10$ . После замыкания полюса системы останутся в левой полуплоскости и система, как показывает логарифмический критерий, будет асимптотически устойчивой.

## 6.4. АНАЛИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Математические модели автоматических систем, как правило, известны с точностью до значения некоторых параметров, что и объясняет ограниченную адекватность всякой модели. Причиной этой ограниченности является неизбежная неидеальность исходных расчетных схем, погрешность линеаризации и ограниченность предположения о стационарности параметров. Изучение влияния параметров модели системы на ее динамические свойства, и в частности на ее устойчивость, является одной из основных задач анализа систем управления.

Пусть система управления задана своей передаточной функцией, в которой некоторые параметры, возможно, изменяются:

$$W(s; \alpha, \beta, \dots, \gamma), \quad \alpha, \beta, \dots, \gamma = \text{var.}$$

Совокупность значений параметров  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$  можно рассматривать как точку в пространстве параметров. Каждая точка

параметрического пространства задает определенные значения параметров модели системы, определяет ее характеристический многочлен, полностью определяет полюса системы. Таким образом, в параметрическом пространстве можно выделить **область устойчивости** — множество точек, которым отвечает устойчивая система, **область неустойчивости** — совокупность значений параметров системы, при которых система неустойчива, и, наконец, **границу области устойчивости**.

Степень близости параметрической точки к границе устойчивости характеризуется **запасом устойчивости**. О запасе устойчивости системы можно судить по расположению ее полюсов: чем дальше они от мнимой оси, тем большим запасом устойчивости система обладает.

Критерии устойчивости позволяют определить меру устойчивости. Например, по критерию Найквиста запас устойчивости оценивается двумя показателями:  $\rho$  — **запас устойчивости по амплитуде**,  $\eta$  — **запас устойчивости по фазе**.

Система обладает запасом устойчивости не менее чем  $(\rho, \eta)$ , если ее годограф Найквиста не имеет общих точек с кольцевой областью (рис. 63, а), содержащей точку  $(-1, j0)$ . Запасы устойчивости  $(\rho, \eta)$  можно вычислить по логарифмическим частотным характеристикам Бode (рис. 63, б):

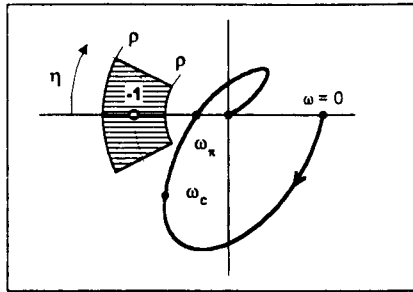
$$\rho = -L(\omega_\pi); \quad \eta = 180^\circ - \varphi(\omega_c),$$

где  $\omega_c$  — частота среза;  $L(\omega_c) = 0$ ;

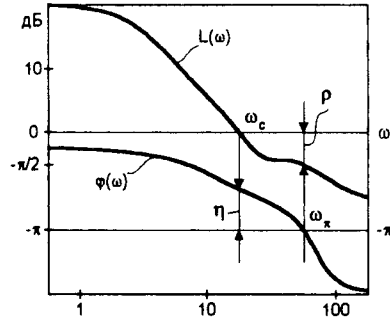
$\omega_\pi$  — частота, при которой фазовая характеристика пересекает уровень  $-\pi$ .

Минимально необходимый запас устойчивости системы управления принимается равным  $(6 \text{ дБ}, 30^\circ)$  [5].

Часто единственным варьируемым параметром системы является передаточный коэффициент ее разомкнутого контура. Задача анализа состоит в том, чтобы определить **предельное значение передаточного коэффициента  $k^*$**  — значение, при котором система выходит на границу устойчивости.



а



б

РИС. 63

Найти предельный коэффициент можно, используя одно из условий:

- годограф Найквиста проходит через точку  $(-1, j0)$ ,  $W(\omega_c; k^*) = -1$ ;
- или по критерию Гурвица,  $G_{n-1}(k^*) = 0$ ;
- или полагая нулевым запас устойчивости,  $\omega_\pi = \omega_c$ ,  $20 \lg k^* = L(1) - L(\omega_\pi)$ .

### Примеры

1. Для системы, прямой тракт которой содержит три инерционных звена вида

$$W_i(s) = k_i / (T_i s + 1); \quad i = 1, 2, 3,$$

предельный коэффициент передачи можно найти, исходя из критерия Гурвица. Характеристический полином замкнутой системы равен

$$(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1) + k_1 k_2 k_3;$$

положим:

$$a_0 = T_1 T_2 T_3; \quad a_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3;$$

$$a_2 = T_1 + T_2 + T_3; \quad a_3 = 1 + k; \quad k = k_1 k_2 k_3,$$

поэтому, составив граничное условие устойчивости, получим

$$k^* = (1/T_1 + 1/T_2 + 1/T_3)(T_1 + T_2 + T_3) - 1.$$

Заметим, что если все три звена системы одинаковы, то предельный коэффициент передачи равен восьми.

2. Предельный коэффициент передачи для системы, логарифмические частотные характеристики которой представлены на рис. 63, б, равен 5. Запас по амплитуде этой системы равен 6 дБ, следовательно,  $L(1) = 20$  дБ.

Метод построения *параметрической области устойчивости* основан на двух фактах:

- корни характеристического уравнения непрерывно зависят от параметров системы;
- если точка лежит на границе параметрической области устойчивости, то хотя бы один характеристический корень лежит на мнимой оси.

Иначе говоря, предполагается справедливым утверждение:

*граница области устойчивости в пространстве параметров является образом мнимой оси в комплексной плоскости характеристических корней системы.*

Пусть характеристический полином замкнутой системы определен с точностью до одного параметра и пусть этот полином линеен относительно этого параметра:

$$A(\lambda; \mu) = \mu N_1(\lambda) + N_2(\lambda).$$

Разрешив характеристическое уравнение относительно параметра и выполнив замену  $\lambda = j\omega$ , получим симметричную относительно оси абсцисс кривую

$$\mu(j\omega) = -N_2(j\omega)/N_1(j\omega),$$

которая является образом мнимой оси комплексной плоскости корней системы. Полученная кривая разбивает параметрическое пространство на области, среди которых можно найти и область

устойчивости. Выделить эту область устойчивости можно, используя, например, алгебраические критерии. Действительные значения параметра  $m$  из области устойчивости составляют некоторое множество допустимых значений параметра.

В том случае, когда характеристический полином зависит от двух параметров и зависимость эта линейна:

$$A(\lambda; \mu, \nu) = \mu N(\lambda) + \nu M(\lambda) + L(\lambda),$$

после подстановки  $\lambda = j\omega$  следует выделить мнимую и действительную части этого выражения. В результате получаем два алгебраических неоднородных уравнения:

$$\mu N_1(\omega) + \nu M_1(\omega) + L_1(\omega) = 0;$$

$$\mu N_2(\omega) + \nu M_2(\omega) + L_2(\omega) = 0,$$

потому что  $N(j\omega) = N_1(\omega) + jN_2(\omega)$ ,  $M(j\omega) = M_1(\omega) + jM_2(\omega)$ ,  $L(j\omega) = L_1(\omega) + jL_2(\omega)$ .

Решение уравнений  $\mu = \mu(\omega)$ ,  $\nu = \nu(\omega)$  определяет в двумерном параметрическом пространстве кривую, которая разбивает параметрическое пространство на области, среди которых можно найти и область устойчивости. Выделить эту область устойчивости можно, используя, например, алгебраические критерии. Для чего в исследуемой области произвольно выбирается представитель  $(\mu_0, \nu_0)$ , затем к полиному  $A(\lambda; \mu_0, \nu_0)$  следует применить, например, критерий Гурвица.

## Примеры

1. Передаточная функция разомкнутой системы содержит один параметр:

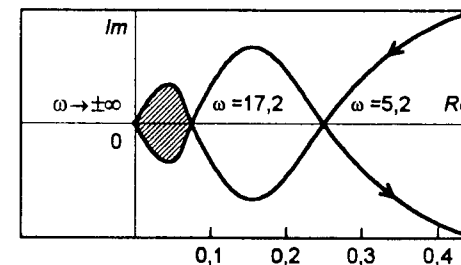
$$W(s; \mu) = 19 / ((0,2s + 1)(0,5s + 1)(\mu s + 1)).$$

Найдем множество значений параметра, при которых замкнутая система будет асимптотически устойчивой.

Характеристическое уравнение системы, разрешенное относительно параметра, имеет вид

$$\mu(0,1s^3 + 0,7s^2 + s) + 0,1s^2 + 0,7s + 20 = 0,$$

РИС. 64



откуда после подстановки  $\lambda = j\omega$  получаем в явном виде функцию  $\mu(j\omega)$ , у которой

$$\operatorname{Re} \mu(j\omega) = 0,7 / (0,01\omega^4 + 0,29\omega^2 + 1);$$

$$\operatorname{Im} \mu(j\omega) = (0,01\omega^4 - 1,61\omega^2 + 20) / (\omega(0,01\omega^4 + 0,29\omega^2 + 1)).$$

Кривая  $\mu(j\omega)$  изображена на рис. 64. Она делит параметрическое действительное одномерное пространство на три интервала, один из которых  $[0; 0,08)$  соответствует области асимптотической устойчивости, поскольку после подстановки в характеристическое уравнение системы  $\mu_0 = 0,05$  получаем по критерию Гурвица достаточные условия устойчивости.

2. **Полиномом Вышнеградского** называют выражение

$$V(p; \alpha, \beta) = p^3 + \alpha p^2 + \beta p + 1,$$

которое получается из типового характеристического многочлена третьего порядка  $A(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$  в результате замены  $p^3 = (a_0/a_3)\lambda^3$ .

Область параметрической устойчивости системы, для которой полином Вышнеградского является характеристическим, определяется неравенствами

$$\alpha > 0; \quad \beta > 0; \quad \alpha\beta > 1.$$

Область располагается в первом квадранте плоскости параметров выше гиперболы  $\alpha\beta = 1$ .

3. Передаточная функция разомкнутой части системы зависит от двух настраиваемых параметров:

$$W(s; \mu, \tau) = 50(\tau s + 1) / ((0,4s + 1)(\mu s + 1)).$$

Чтобы найти область устойчивости, составим характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$\mu(0,4s^3 + s^2) + \tau 50s + 0,4s^2 + s + 50 = 0.$$

Осуществив подстановку  $\lambda = j\omega$ , получим

$$-\mu(0,4j\omega^3 + \omega^2) + \tau 50j\omega + j\omega + 50 - 0,4\omega^2 = 0.$$

Выпишем пару уравнений:

$$\mu \omega^2 + 0,4\omega^2 - 50 = 0;$$

$$\mu 0,4\omega^3 - \tau 50\omega - \omega = 0.$$

Определитель матрицы коэффициентов этой системы равен  $-50\omega^3$ . Решив систему уравнений, получим параметрическое уравнение кривой — границы области устойчивости:

$$\mu(\omega) = 50\omega^{-2} + 0,4;$$

$$\tau(\omega) = -0,0032\omega^2 + 0,38.$$

Кроме того, границу области устойчивости составляет и прямая  $\mu(\omega) = 0$ . Эти линии делят плоскость параметров на четыре области: **A**, **B**, **C**, **D** (рис. 65), одна из которых оказалась искомой областью устойчивости, в чем можно убедиться, используя критерий Гурвица для каждой области. Возьмем представителем области **A** точку  $\mu = \tau = 1$ , в этом случае характеристический полином системы принимает вид

$$0,4s^3 + 1,4s^2 + 51s + 50.$$

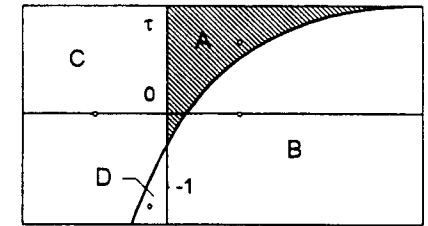
Критерий Гурвица выполняется, система устойчива. В области **B** выбираем точку, где  $\mu = 1$ ,  $\tau = 0$ , в этом случае характеристический полином принимает вид

$$0,4s^3 + 1,4s^2 + s + 50.$$

Критерий Гурвица не выполняется, система неустойчива. Аналогично поступаем с областями **C** и **D**, чтобы показать, что это области неустойчивости.

Динамические свойства системы полностью определяются распределением корней характеристического уравнения на комплексной плоскости. Изменение параметров системы приводит к изменению местоположения ее характеристических корней.

РИС. 65



Геометрическое место точек на комплексной плоскости, удовлетворяющих характеристическому уравнению системы при вариации какого-либо свободного параметра, называют **корневым годографом системы**.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы зависит от одного свободно варьируемого параметра:

$$W(s) = \mu B_m(s)/A_n(s),$$

где  $A_n(s)$ ,  $B_m(s)$  — действительные полиномы степени  $n$ ,  $m$  ( $n \geq m$ ) соответственно;  $\mu$  — свободно варьируемый параметр.

Характеристическое уравнение замкнутой системы  $A_n(s) + \mu B_m(s) = 0$ . При  $\mu = 0$  это уравнение в виде  $A_n(s) = 0$  определяет начальное положение траектории корней  $\{\pi_i, i = 1, \dots, n\}$ . При  $\mu \rightarrow \pm \infty$  характеристические корни системы удовлетворяют уравнению  $B_m(s) = 0$  и являются финальными точками траектории корней  $\{z_j, j = 1, \dots, m\}$ .

Укажем без доказательства свойства корневого годографа, которые позволят построить качественную картину траектории корней системы для последующего количественного анализа свойств системы (R. Evans, 1948):

- начальные точки годографа совпадают с полюсами разомкнутой системы, конечные точки годографа — с нулями разомкнутой системы;
- при непрерывном изменении параметра от нуля до плюс бесконечности из каждой начальной точки  $\pi_i$  выходит ветвь корневого годографа, которая является непрерывной кривой, из этих  $n$  траекторий  $m$  заканчиваются в  $z_j$  финальных точках, остальные  $(n - m)$  ветвей годографа уходят в бесконечность. Эти  $n$  траекторий образуют положительную часть корневого годографа. Аналогичным

свойством обладает отрицательная часть корневого годографа, которая соответствует изменению параметра от нуля до минус бесконечности;

- те  $(n - m)$  ветвей годографа, которые уходят в бесконечность, асимптотически приближаются к лучам правильной  $2(n - m)$  лучевой звезды, центр которой находится на действительной оси в точке

$$(\sum \pi_i - \sum z_j) / (n - m);$$

- вещественная ось является подмножеством траекторий корневого годографа, причем в положительную часть годографа входят те точки действительной оси, правее которых имеется нечетное количество нулей и полюсов;

- кратными точками годографа могут быть только те точки, которые одновременно удовлетворяют характеристическому уравнению и его производной. Кратные точки следует искать из соотношения

$$A(s)B'(s) - A'(s)B(s) = 0;$$

- корневой годограф симметричен относительно вещественной оси;
- значение параметра, соответствующее произвольной точке  $s^*$  годографа, определяется с точностью до знака выражением

$$\mu(s^*) = \Pi(s^* - \pi_i) / \Pi(s^* - z_j).$$

### Примеры

1. Система управления имеет передаточную функцию разомкнутой части в виде

$$W(s; k) = 10k(s + 2) / (s^3 + 3s^2 + 10).$$

Разомкнутая часть системы является неустойчивой, поскольку среди ее полюсов имеется правая комплексно-сопряженная пара  $0,361 \pm j1,6$ . Частотный годограф разомкнутой части имеет вид

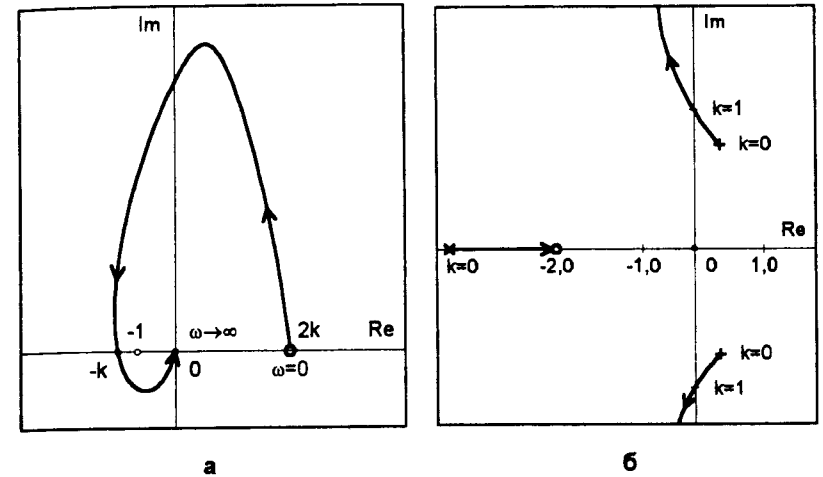


РИС. 66

$$W(j\omega) = 10k(20 - 60\omega^2 - \omega^4) / \Delta + j(10\omega - \omega^3) / \Delta;$$

$$\Delta = (10 - 3\omega^2)^2 + \omega^6.$$

Годограф частотной характеристики при  $k > 1$ , как показано на рис. 66, а, охватывает контрольную точку в положительном направлении ровно один раз, что позволяет, в силу критерия Найквиста, сделать заключение об асимптотической устойчивости системы после замыкания. На рис. 66, б приведена часть корневого годографа, соответствующая  $k > 0$ .

2. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s; \mu) = \mu(s^2 + s + 20) / ((s(s + 1)(s + 2)).$$

Для нее  $n = 3$ ;  $m = 2$ ;  $\{\pi_i\} = \{0; -1; -2\}$ ;  $\{z_j\} = \{-1\}$ .

Корневой годограф замкнутой системы имеет две ветви, уходящие в бесконечность, очевидно, по действительной оси. Кратные точки  $s = -0,5$  и  $s = -1,5$  для положительной и отрицательной частей годографа соответственно получены из уравнения

$$A(s)B'(s) - A'(s)B(s) = 0,$$

где  $A(s) = s(s + 1)(s + 2)$ ;

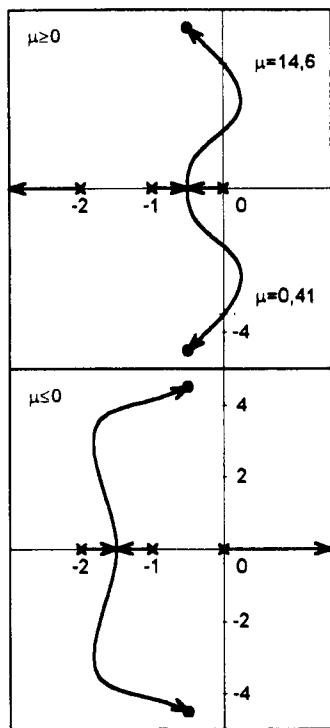


РИС. 67

$$A'(s) = (s + 1)(s + 2) + s(s + 2) + s(s + 1);$$

$$B(s) = s^2 + s + 20;$$

$$B'(s) = 2s + 1.$$

При  $\mu = 0,41$  и  $\mu = 14,6$  траектория корней пересекает мнимую ось. Поэтому замкнутая система теряет устойчивость, когда параметр системы принимает значения на интервале  $(0,41; 14,6)$  и когда  $\mu < 0$ . Годограф системы представлен на рис. 67.

3. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \mu(s + 1) / ((s + 2)(s + 4)(s^2 + 4s + 5)).$$

Для нее  $p = 5$ ;  $m = 1$ ;  $\{\pi_i\} = \{0; -2; -4; -2 \pm j\}$ ;  $\{z_j\} = \{-1\}$ .

Корневой годограф замкнутой системы (рис. 68) имеет 8 асимптот, которые образуют правильную звезду с центром в точке  $-2,25$ , поскольку  $\sum \pi_i = -10$ ,  $\sum z_j = -1$ .

4. На рис. 69 изображен корневой годограф системы с характеристическим уравнением

$$(s + 1)^4 + \mu(s - 2) = 0.$$

Для этой системы:  $p = 4$ ;  $m = 1$ ;  $\{\pi_i\} = \{-1; -1; -1; -1\}$ ;  $\{z_j\} = \{2\}$ .

Корневой годограф системы имеет 6 асимптот, которые образуют правильную звезду с центром в точке  $-2$ . Кратный корень удовлетворяет уравнению

$$(s + 1)^4 - 4(s + 1)^3(s - 2) = 0$$

и равен 3.

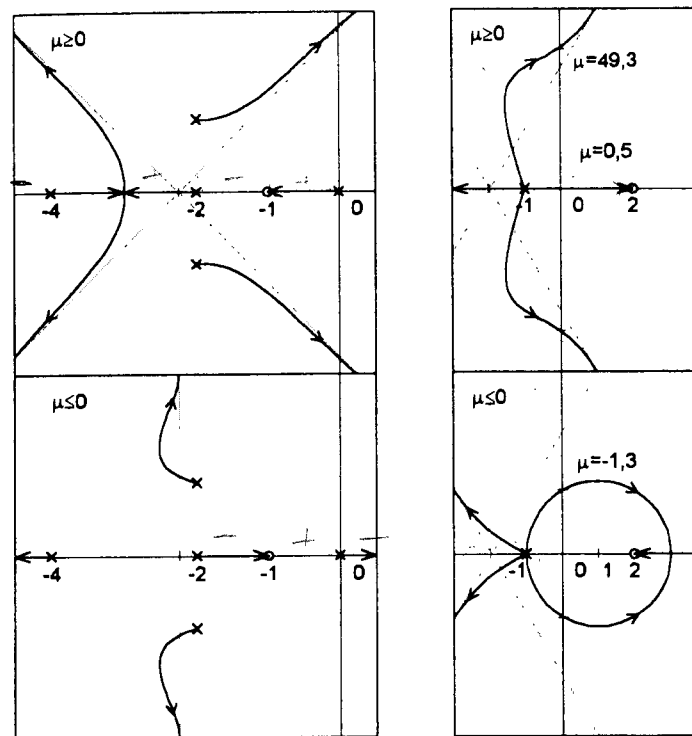


РИС. 68

РИС. 69

Из рис. 68 видно, что если параметр  $m$  изменяется в интервале  $(-1,3; 0,5)$ , то система будет асимптотически устойчивой.

5. По виду характеристического полинома

$$s^3(s + 30)(s + 45) + k(s + 5)(s + 15)$$

замкнутой системы можно заключить, что начальное положение ее полюсов составляет множество  $\{\pi_{1,2,3} = 0; \pi_4 = -30; \pi_5 = -45\}$ , а финальное:  $\{z_1 = -5, z_2 = -15\}$ . Из пяти корней два переместятся в финальное положение, а три уйдут в бесконечность, асимптотически приближаясь к лучам шестилучевой звезды с центром в точке  $-31,7$  на действительной оси. На рис. 70 сплошными ли-



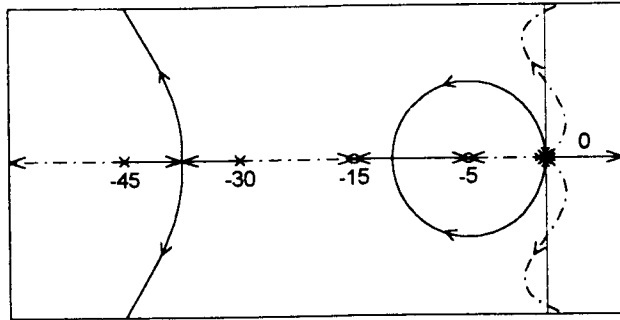


РИС. 70

ниями изображен корневой годограф при изменении параметра от  $-\infty$  до 0, а штрих-пунктирными — при изменении параметра от 0 до  $\infty$ .

## 6.5. УПРАЖНЕНИЯ

1. Дать суждение об устойчивости системы, заданной матрицей состояния:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0,3 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \text{ г) } \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Используя критерий Гурвица, определить условия устойчивости для системы, заданной характеристическим полиномом:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \lambda^3 + 3,5(\lambda + 1)\lambda + 1; \\ \text{б) } & (\Gamma_1\lambda + 1)(\Gamma_2^2\lambda^2 + 2\zeta\Gamma\lambda + 1) + k; \\ \text{в) } & \lambda^4 + \alpha\lambda^3 + 2\lambda + \beta\lambda + 1. \end{aligned}$$

3. Построить таблицу Рауса и проверить по характеристическому многочлену системы ее устойчивость:

$$\begin{aligned} \text{а) } & 0,01\lambda^3 + 0,08\lambda^2 + 0,2\lambda + 1; \\ \text{б) } & 0,02\lambda^4 + 45\lambda^2 + 100. \end{aligned}$$

4. Используя матричный критерий проверить устойчивость системы, заданной матрицей состояния:

$$\begin{pmatrix} -0,9 & 3,1 & -0,2 \\ -0,4 & -2,5 & 3,2 \\ 1,1 & -1,5 & -3,1 \end{pmatrix}$$

5. Построить годограф Михайлова и дать суждение об устойчивости системы, для которой известен характеристический полином:

$$0,002\lambda^5 + 0,234\lambda^4 + 3,76\lambda^3 + 19,6\lambda^2 + 36\lambda + 140.$$

6. Исследовать на устойчивость систему, оценить запас устойчивости для каждого варианта, если в разомкнутом состоянии ее передаточная функция имеет вид

$$\begin{aligned} \text{а) } & 120/(s^2(10s + 1)(0,05s + 1)(0,03s + 1); \\ \text{б) } & 8(0,1s + 1)/((0,15s + 1)(0,05s + 1); \\ \text{в) } & 12,5(0,2s + 1)/((0,04s^2 + 1)(s + 1)); \\ \text{г) } & 2000/(0,01s^4 + 1,2s^3 + 25s^2 + 40s - 1,05). \end{aligned}$$

7. Найти предельный коэффициент передачи в системе, прямой тракт которой состоит из четырех инерционных звеньев.

8. Построить параметрическую область устойчивости для системы с известным характеристическим полиномом:

$$\begin{aligned} \text{а) } & A(\lambda; \mu) = \lambda(0,4\lambda + 1)(0,15\lambda + 1) + 50(\mu\lambda + 1); \\ \text{б) } & A(\lambda; \mu, \nu) = \lambda(0,2\lambda + 1)(\nu\lambda + 1) + 100(\mu\lambda + 1); \\ \text{в) } & A(\lambda; \mu, \nu) = \lambda^3 + \mu\lambda^2 + 11\lambda + \nu. \end{aligned}$$

9. Построить корневой годограф и дать суждение об устойчивости системы, заданной характеристическим полиномом:

$$\begin{aligned} \text{а) } & A(\lambda; \mu) = \lambda(\lambda + 1) + \mu; \\ \text{б) } & A(\lambda; \mu) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) + \mu; \\ \text{в) } & A(\lambda; \mu) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda^2 - 12) + \mu\lambda^2; \\ \text{г) } & A(\lambda; \mu, \nu) = (\lambda + 8)(\lambda^2 + 2\mu\lambda + 50) + \nu, \quad \mu = 2; 0. \end{aligned}$$

10. Рассматривается система, содержащая в прямом тракте помимо линейного звена с передаточной функцией  $W(s)$  звено запаздывания. Найти частотные характеристики разомкнутой системы, построить частотный годограф разомкнутой системы. Применить критерий Найквиста или логарифмический критерий для оценки устойчивости такой системы. Рассмотреть случай  $W(s; k) = k/(0,2s + 1)$ , запаздывание 0,02 с. Определить предельный коэффициент передачи.

## 7 АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ

*Динамические процессы и ошибки в системах управления — Оценка качества переходных процессов — Стохастические методы анализа качества — Машинные методы анализа качества процессов управления — Упражнения.*

### 7.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ОШИБКИ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Динамический процесс в системе управления  $\Sigma^{(n)}$ :  $\langle A, B, C \rangle$  возникает как реакция на начальное отклонение  $x(0)$  от равновесного состояния или как реакция на входное воздействие  $u(t)$ . В общем случае эти причины могут действовать совместно, порождая собственную и вынужденную составляющие динамического процесса:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t [Ce^{A(t-\tau)}B] u(\tau)d\tau.$$

Если на покоящуюся систему со скалярным входом и выходом действует только задающее воздействие  $u(t)$ , то переходный процесс в системе определяется выражением

$$y(t) = \int_0^t k(\tau)u(t - \tau)d\tau,$$

где  $k(t) = Ce^{At}B$  — импульсная функция системы.

Если момент приложения задающего воздействия достаточно далеко удален от текущего момента времени, то в системе, можно считать, закончились переходные процессы и имеет место **установившийся, вынужденный динамический процесс**, который определяется выражением

$$y^*(t) = \int_0^{\infty} [k(\tau)u(t - \tau)]d\tau.$$

В этом же смысле можно говорить об **ошибке отработки задающего воздействия** и об **установившейся ошибке отработки задания**:

$$e(t) = u(t) - y(t); \quad e^*(t) = u(t) - y^*(t).$$

Предположим, что входное воздействие  $u(t)$  допускает в каждой текущей точке  $t$  разложение в ряд Тейлора:

$$u(t - \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m u^{(m)}(t) \tau^m / m!.$$

В этом случае установившийся процесс принимает вид

$$y^*(t) = \sum_{m=0}^{\infty} u^{(m)}(t) / m! \left[ (-1)^m \int_0^{\infty} \tau^m k(\tau) d\tau \right].$$

Выражения

$$(-1)^m \int_0^{\infty} \tau^m k(\tau) d\tau = \mu_m, \quad m = 0, 1, \dots$$

называются **моментами порядка  $m$  импульсной переходной характеристики**. Эти величины, вычисляемые заранее по импульсной характеристике, позволяют найти установившийся процесс как функцию от входного сигнала и его производных:

$$y^*(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m u^{(m)}(t) / m!.$$

Моменты импульсной функции  $\mu_m$  могут быть найдены по передаточной функции. В самом деле, ведь

$$H(s) = \int_0^{\infty} k(t) \exp(-st) dt,$$

поэтому производная от  $H(s)$  по  $s$  при  $s \rightarrow 0$  совпадает в силу непрерывности функции  $H(s)$  в нуле с  $\mu_1$  — первым моментом. Нетрудно понять, что и  $m$ -я производная от  $H(s)$  по  $s$  при  $s \rightarrow 0$  совпадает в силу непрерывности функции  $H(s)$  в нуле с  $\mu_m$ :

$$\mu_m = [d^m H(s) / ds^m]_{s=0}.$$

С другой стороны, если разложить функцию  $H(s)$  в ряд Тейлора в окрестности  $s = 0$ , то обнаружим, что моменты импульсной функции  $\mu_m$  — коэффициенты при степенях  $s$  этого разложения:

$$H(s) = \sum_{m=0}^{\infty} [d^m H(s) / ds^m]_{s=0} s^m / m! = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m s^m / m!.$$

Это представление используется как алгоритм для отыскания моментов импульсной функции, а с ними установившегося процесса и установившейся ошибки отработки входного воздействия:

$$\begin{aligned} e^*(t) &= u(t) - y^*(t) = u(t) - (u(t)\mu_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m u^{(m)}(t) / m!) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m u^{(m)}(t) / m!. \end{aligned}$$

В этом выражении коэффициенты  $c_0 = 1 - \mu_0$ ,  $c_m = -\mu_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$  называют **коэффициентами ошибки**. Эти коэффициенты можно найти прямо, используя понятие передаточной функции системы по ошибке  $H_e(s) = 1 - H(s)$ :

$$c_m = [d^m H_e(s) / ds^m]_{s=0}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Коэффициенты ошибки, которые зависят от структуры и параметров системы, позволяют не только оценить величину возможной ошибки обработки входного воздействия, но и наметить пути ее уменьшения.

Пусть входное воздействие на систему является в общем случае полиномиальным сигналом:

$$u(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1}$$

и пусть первоначально это — ступенчатый сигнал  $u(t) = \alpha_0$ . Тогда установившаяся ошибка обработки этого сигнала  $e^*(t) = c_0 \alpha_0$  — величина постоянная. Называют такую ошибку *статической*.

Статическая ошибка пропорциональна величине входного ступенчатого воздействия, причем  $c_0 = H_e(0)$ .

Для автоматической системы канонической структуры (см. рис. 22)

$$H_e(s) = 1/(1 - W_0(s)W_1(s)),$$

где  $W_0(s)$ ,  $W_1(s)$  — дробно-рациональные выражения вида

$$W(s) = k(1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m)/(1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n)$$

с коэффициентами передачи  $k_0$ ,  $k_1$  соответственно; статическая ошибка пропорциональна величине  $1/(1 - k_0 k_1)$  и поэтому может быть уменьшена только путем увеличения коэффициента передачи регулятора  $k_1$ . Системы, для которых статическая ошибка не равна нулю, называют *статическими*.

Другой путь устранения статической ошибки — изменение структуры системы, введение в регулятор интегрирующей составляющей. Действительно, если передаточная функция регулятора имеет вид

$$W_1(s) = k_1(1 + b_1 s + \dots + b_m s^m)/(s(1 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1})),$$

то уже в этом случае  $c_0 = 0$ . Системы, для которых статическая ошибка равна нулю, называются *астатическими*.

Для безошибочного воспроизведения входного сигнала общего полиномиального вида

$$u(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1}$$

система должна иметь  $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$ , поскольку  $u^{(m)}(t) = 0$  для всех  $m \geq n$ . О таких системах говорят, что они обладают *астатизмом порядка*  $n$ .

Астатизм порядка  $n$  может быть достигнут, когда в системе управляющее устройство вместе с объектом в прямом тракте имеет не менее  $n$  интегрирующих звеньев. Передаточная функция по ошибке таких систем имеет не менее  $n$  нулей в начале координат. Система с астатизмом первого порядка безошибочно воспроизводит ступенчатый сигнал любого уровня, но линейно растущий сигнал обрабатывает с ошибкой. Система с астатизмом второго порядка безошибочно воспроизводит не только ступенчатый сигнал, но линейный сигнал любого темпа.

Понятие астатизма системы может быть применено не только к задающему, но и к возмущающему воздействию. Одна и та же система может быть астатической по управляющему сигналу и статической — по возмущающему. Следящие системы должны быть астатическими по отношению к задающему воздействию, а системы стабилизации — астатическими по отношению к возмущающему воздействию.

## Примеры

1. Вычислим коэффициенты ошибок для системы канонической структуры (см. рис. 22), у которой

$$W_1(s) = k_1(1 + T_1 s)/(1 + T_2 s);$$

$$W_0(s) = k_0/(s(1 + T_0 s)).$$

Передаточная функция ошибки воспроизведения задающего сигнала для этой замкнутой системы определяется выражением

$$H_e(s) = s(1 + T_0 s)(1 + T_2 s)/(s(1 + T_0 s)(1 + T_2 s) + k_0 k_1 (1 + T_1 s)).$$

Или в раскрытом виде:

$$H_e(s) = (T_0 T_2 s^3 + (T_0 + T_2) s^2 + s) / (T_0 T_2 s^3 + (T_0 + T_2) s^2 + s(1 + k_0 k_1 T_1) + k_0 k_1).$$

С другой стороны,  $H_e(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2/2! + \dots$ , поэтому образуем тождество:

$$T_0 T_2 s^3 + (T_0 + T_2) s^2 + s = (T_0 T_2 s^3 + (T_0 + T_2) s^2 + (1 + k_0 k_1 T_1) s + k_0 k_1)(c_0 + c_1 s + c_2 s^2/2! + \dots),$$

которое позволит, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов, получить уравнения для искомым коэффициентов ошибки:

$$\begin{aligned} 1: \quad 0 &= k_0 k_1 c_0; \\ s: \quad 1 &= (1 + k_0 k_1 T_1) c_0 + k_0 k_1 c_1; \\ s^2: \quad T_0 + T_2 &= (T_0 + T_2) c_0 + (1 + k_0 k_1 T_1) c_1 + k_0 k_1 c_2/2; \dots \end{aligned}$$

Решив эти уравнения, получим, что  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = 1/k_0 k_1$ ,  $c_2 = 2(T_0 + T_2 - T_1 - 1/k_0 k_1)/k_0 k_1, \dots$

Динамическая точность воспроизведения входного линейного сигнала  $u(t) = 10 - 3t$  для этой системы с параметрами  $k_0 = 125$ ,  $k_1 = 1,2$  определяется выражением

$$e^*(t) = (10 - 2t)c_0 - 3c_1 = -0,02 \text{ с}^{-1}.$$

2. Найдем для системы со структурой, представленной на рис. 22, условия безошибочного воспроизведения входного линейного сигнала, если

$$W_0(s) = k_0/(s(1 + T_0 s)); \quad W_1(s) = k_1/(1 + T_1 s); \quad W_2(s) = k_2 s.$$

Передаточная функция ошибки замкнутой системы имеет вид

$$H_e(s) = (1 - W_0 W_2)/(1 + W_0 W_1).$$

Выполнив необходимые преобразования, получим решающее тождество:

$$\begin{aligned} T_0 T_1 s^3 + (T_0 + T_1 - k_0 k_2 T_1) s^2 + (1 - k_0 k_2) s &= \\ = (T_0 T_1 s^3 + (T_0 + T_1) s^2 + s + k_0 k_1)(c_0 + c_1 s + \dots), \end{aligned}$$

откуда искомые соотношения для коэффициентов ошибки:

$$0 = k_0 k_1 c_0; \quad 1 - k_0 k_2 = c_0 + k_0 k_1 c_1.$$

Итак, если  $k_2 = 1/k_0$ , то помимо  $c_0$  оказывается равным нулю и  $c_1$ , что позволяет системе воспроизводить линейный входной сигнал без установившейся ошибки.

## 7.2. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Для прямой оценки качества системы управления используется кривая переходного процесса  $h(t)$ , которую характеризуют несколькими числовыми показателями (рис. 71):

- $h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$  — установившееся значение переходного процесса;
- $h_{\max} = \max_t h(t)$  — максимальное значение процесса;
- $\sigma = 100\% (h_{\max} - h(\infty))/h(\infty)$  — перерегулирование;
- $t_p$  — время регулирования, или время переходного процесса, отсчитываемое от момента приложения воздействия до момента, когда  $\forall t \geq t_p, |h(t) - h(\infty)| \leq \Delta$ , где  $\Delta$  — заданная малая величина;
- $\nu$  — число перерегулирований в интервале  $[0, t_p]$ ;
- $t_d$  — время первого достижения уровня задания;
- $t_m$  — время достижения первого максимума.

Кривую переходного процесса  $h(t)$  можно получить либо прямым путем, решая аналитически или численными методами уравнения модели системы, либо косвенно, используя частотные и временные характеристики системы, путем построения некоторой аппроксимации.

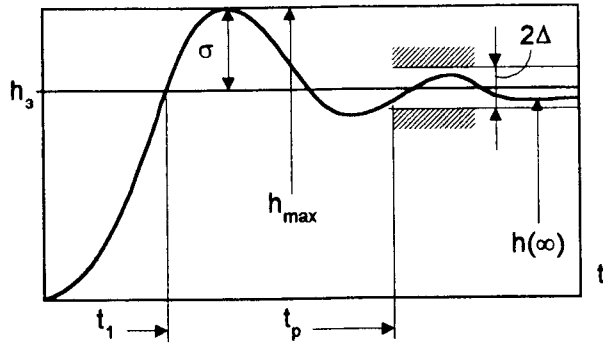


РИС. 71

Алгоритмическим основанием для приближенного построения кривой переходного процесса является соотношение

$$h(t) = 2\pi^{-1} \int_0^t (P(\omega)(\sin \omega t)/\omega) d\omega,$$

которое получается интегрированием по времени импульсной характеристики системы.

Импульсная временная характеристика определяется через частотную характеристику системы в виде соотношения

$$k(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Если  $H(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ , то, используя представление Эйлера для  $\exp(j\omega t)$  и то, что функция  $H(j\omega)$ ,  $-\infty < \omega < \infty$  симметрична относительно действительной оси, получим

$$k(t) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} (P(\omega) \cos(\omega t) - Q(\omega) \sin(\omega t)) d\omega.$$

Импульсная функция по определению равна нулю для  $t < 0$ , поэтому справедливо, что

$$k(-t) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} (P(\omega) \cos(\omega t) + Q(\omega) \sin(\omega t)) d\omega = 0.$$

Сложив два этих результата, получим

$$k(t) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos(\omega t) d\omega,$$

откуда интегрированием по времени находим показанное выше соотношение для построения приближенного переходного процесса.

Методы приближенного построения переходного процесса путем аппроксимации вещественной частотной характеристики можно найти в [5].

Сравнение систем по качеству процессов управления можно осуществить не только путем прямого вычисления показателей качества, но и косвенно, путем вычисления так называемых **интегральных оценок**. Эти числовые оценки позволяют не только выявить лучший в том или ином смысле переходный процесс, но и определять те значения параметров системы, при которых имеет место лучшее качество процессов. Используя интегральную оценку как критерий оптимальности, можно поставить экстремальную задачу отыскания наилучшего в смысле данного критерия процесса: найти, варьируя параметрами системы, такой переходный процесс, чтобы интегральная оценка приняла наименьшее значение среди возможных.

Интегральная оценка формально характеризует меру близости процесса к наилучшему — экстремальному процессу. Обычно интегральные оценки имеют вид квадратичного функционала от  $e(t) = u(t) - y(t)$  ошибки обработки входного воздействия и ее производных по времени.

Будем различать:

$$J_0 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt;$$

$$J_1 = \int_0^{\infty} [e^2(t) + \tau^2 (e'(t))^2] dt, \dots;$$

$$J_k = \sum_k \int_0^{\infty} \tau_k^2 (e^{(k)}(t))^2 dt.$$

Наилучшим по оценке  $J_0$  будет такой переходный процесс, для которого  $e^*(t) \equiv 0$ ,  $t > 0$ ; очевидно, это идеальный, не-

достижимый процесс. Переходный процесс, лучший в смысле  $J_0$ , может иметь малые отклонения, но допускает большие значения производных отклонения.

Наилучшим по оценке  $J_1$  будет такой переходный процесс, для которого  $e(t) + \tau e'(t) = 0$ ,  $t > 0$ , что следует из задачи минимизации  $J_1(e(t))$ . Этот процесс является уже монотонным и достаточно гладким:  $e^*(t) = e(0)\exp(-t/\tau)$ .

Вычисление интегральной квадратичной оценки  $J_0$  основано на соотношении Парсеваля:

$$\int_0^{\infty} e^2(t) dt = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega)E(-j\omega)d\omega,$$

где  $E(j\omega) = E(s)|_{s=j\omega}$  — преобразование Фурье функции  $e(t)$ .

Если функция  $E(s) = H_0(s)/s$  имеет дробно-рациональное представление:

$$E(s) = (b_0 + b_1s + \dots + b_m s^m)/(a_0 + a_1s + \dots + a_n s^n),$$

то для нее формула Парсеваля имеет матричное аналитическое представление (7.3). Для случая  $m = n - 1$  значения  $J_0$  табулированы Мак-Ленном [4, 5]. Представим фрагмент этой таблицы:

$$\begin{aligned} n = 1, \\ J_0 &= b_0^2 / 2a_0 a_1; \\ n = 2, \\ J_0 &= (b_0^2 a_2 + a_1 b_1^2) / 2a_0 a_1 a_2; \\ n = 3, \\ J_0 &= (b_0^2 a_2 a_3 + b_1^2 a_0 a_3 + b_2^2 a_0 a_1 - 2b_0 b_2 a_0 a_3) / \\ & / 2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3). \end{aligned}$$

Интегральная оценка  $J_1$  находится так же, как и  $J_0$ . В самом деле, в силу определения

$$J_1 = \int_0^{\infty} [e^2(t)dt + \tau^2 \int_0^{\infty} (e'(t))^2 dt,$$

поэтому, чтобы вычислить  $J_1$ , надо найти два интеграла типа  $J_0$  от ошибки и от производной ошибки:

$$J_1 = J_0(e) + \tau^2 J_0(e').$$

Интеграл от квадрата производной ошибки вычисляется по той же схеме: находим преобразование Лапласа производной ошибки  $E^*(s) = sE(s) - e(0)$ , а затем в силу соотношения Парсеваля:

$$J_0(e') = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} E^*(j\omega)E^*(-j\omega) d\omega; \quad E^*(j\omega) = E^*(s)|_{s=j\omega}$$

находим и саму оценку  $J_0(e')$ .

### Примеры

1. Для системы с известной передаточной функцией разомкнутой цепи

$$W(s) = k/(s(0,1s + 1)(0,05s + 1))$$

сравнить по критерию  $J_0$  два варианта переходного процесса: при  $k = 3,2$  и при  $k = 15,0$ . Найти значение коэффициента передачи  $k$  для формирования наилучшего в смысле  $J_0$  переходного процесса.

Найдем передаточную функцию по ошибке замкнутой системы:

$$H_0(s) = (s(0,1s + 1)(0,05s + 1))/(s(0,1s + 1)(0,05s + 1) + k),$$

затем определяем изображение ошибки по Лапласу:

$$E(s) = (0,005s^2 + 0,15s + 1)/(0,005s^3 + 0,15s^2 + s + k).$$

Это выражение дробно-рациональное, в котором  $n = 3$ ,  $m = 2$ . Условия Мак-Ленна выполняются, поэтому находим аналитическое представление для интегральной оценки как функции коэффициента передачи:

$$J_0(k) = 1,75(8,57 + k)/(30k - k^2).$$

Теперь для первого варианта  $J_0(3,2) = 0,240$ , а для второго  $J_0(15,0) = 0,183$ . Вторым вариантом предпочтительнее, однако наилучший переходный процесс будет тогда, когда  $J_0(k)$  достигнет минимума по  $k$ . Найдем экстремальное значение интегральной оценки и то  $k$ , при котором это значение достигается.

Из необходимого условия минимума  $dJ_0(k)/dk = 0$  следует, что искомое  $k^*$  удовлетворяет уравнению  $k^2 + 17,14k - 257,1 = 0$ . Откуда находим, что  $k^* = 9,61$ , а  $J_0(k^*) = 0,162$ .

2. Для системы с передаточной функцией  $H(s) = 1/(s^2 + 2\zeta s + 1)$  найти значение параметра  $\zeta$ , которое обеспечивает наилучшее в смысле  $J_1$  качество переходного процесса:

$$J_1 = \int_0^{\infty} [e^2(t) + (e'(t))^2] dt.$$

Найдем преобразование Лапласа ошибки и ее производной:

$$E(s) = (1 - H(s))/s = (s + 2\zeta)/(s^2 + 2\zeta s + 1);$$

$$E^*(s) = (1 - H(s)) - e(0) = -1/(s^2 + 2\zeta s + 1).$$

Величина  $J_1 = J_0(e) + J_0(e')$ . Найдем первоначально интегральную оценку  $J_0(e)$ . Для дробно-рационального выражения  $E(s)$ :  $b_0 = 2\zeta$ ;  $b_1 = 1$ ;  $a_0 = 1$ ;  $a_1 = 2\zeta$ ;  $a_2 = 1$ , поэтому

$$J_0(e; \zeta) = 0,25\zeta^{-1}(1 + 4\zeta^2).$$

Для дробно-рационального выражения  $E^*(s)$ :  $b_0 = -1$ ;  $b_1 = 0$ ;  $a_0 = 1$ ;  $a_1 = 2\zeta$ ;  $a_2 = 1$ , поэтому

$$J_0(e'; \zeta) = 0,25\zeta^{-1}.$$

Таким образом,  $J_1(\zeta) = 0,25\zeta^{-1}(2 + 4\zeta^2)$ .

Значение параметра  $\zeta$ , при котором обеспечивается наилучший в смысле  $J_1$  переходный процесс, находим из необходимого условия минимума  $dJ_1(\zeta)/d\zeta = 1 - 0,5\zeta^{-2} = 0$ . Откуда определяем, что  $\zeta^* = 0,707$ .

Качество переходного процесса можно приближенно оценить по расположению на комплексной плоскости полюсов системы и ее частотным характеристикам. Известны некоторые числовые оценки показателей переходного процесса [4,7].

**Время регулирования** в основном определяется полюсами, ближайшими к мнимой оси, их называют доминирующими. Для случая, когда  $\Delta = 0,05$ , время регулирования оценивается неравенством  $t_p \leq 3/\eta$ , где  $\eta$  — вещественная часть доминирующих корней.

**Перерегулирование** оценивается неравенством

$$\sigma \leq 100 \% \exp(-\pi \operatorname{ctg} \beta),$$

где  $\beta$  — полураствор сектора, который включает весь спектр полюсов системы.

**Время первого достижения и время достижения первого максимума**, которые характеризуют быстродействие системы, оцениваются неравенствами

$$t_d \geq (1,5 \dots 2)/\omega_c; \quad t_m \geq \pi/\omega_c,$$

где  $\omega_c$  — частота среза логарифмической амплитудной частотной характеристики разомкнутой части системы.

## Примеры

1. Для замкнутой системы с передаточной функцией

$$H(s) = 0,8153 \cdot 10^6 / (s^2 + 361,2s + 0,8153 \cdot 10^6),$$

используя аналитические и программные средства, найдем переходную характеристику и показатели качества регулирования. Определим реакцию на единичный линейно растущий сигнал.

Переходная характеристика имеет вид

$$h(t) = 1 - e^{-180,6t} \cos 884,7t - 0,204e^{-180,6t} \sin 884,7t;$$

полюса системы расположены в левой полуплоскости и равны  $\lambda_{1,2} = -80,6 \pm j884,7$ .



Переходный процесс имеет при  $t = 3,69 \cdot 10^{-3}$  с перерегулирование 52,2 %, время регулирования для достижения 95 %-ного задания составляет 0,015 с.

Передаточная функция разомкнутой части системы имеет вид

$$W(s) = 0,8153 \cdot 10^6 / (s(s + 361,2)),$$

система является астатической первого порядка, поэтому установившаяся ошибка обработки единичного сигнала будет равна нулю.

Реакцию системы на входной линейный единичный сигнал следует находить аналитически с использованием преобразования Лапласа:

$$h(t) = t - 0,443 \cdot 10^{-3} (1 - e^{-180,6t} \cos 884,7t) - 0,104 \times 10^{-3} e^{-180,6t} \sin 884,7t.$$

Установившаяся ошибка обработки единичного линейного сигнала будет равна

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = s((1 - H(s))/s^2) = 0,44 \cdot 10^{-3}.$$

2. В условиях предыдущей задачи, но с более полной моделью системы

$$H(s) = 2,718k / (s^3 + 3408,3s^2 + 1,204 \cdot 10^6 s + 2,718k), k = 10^9$$

определим аналитическими и программными средствами показатели качества переходного процесса. Сравним их с полученными выше. Построим корневой годограф при изменении  $k$ .

Характеристический полином замкнутой системы

$$s^3 + 3408,3s^2 + 1,204 \cdot 10^6 s + 2,718k$$

при  $k = 10^9$  имеет два комплексных корня  $\lambda_{1,2} = -57,5 \pm j906,6$  и один действительный  $\lambda_3 = -3293,3$ . Комплексные корни оказываются доминирующими, поскольку находятся гораздо ближе к мнимой оси. Переходная характеристика системы достаточно

близка к характеристике модели второго порядка. Корневой годограф системы при изменении параметра  $k \geq 0$  начинается из трех действительных полюсов:  $\pi_1 = 0$ ;  $\pi_2 = -400,4$ ;  $\pi_3 = -6015,8$ . С увеличением параметра  $k$  полюса  $\pi_1$  и  $\pi_2$  двигаются по действительной оси навстречу друг другу, а затем превращаются в комплексно-сопряженную пару и удаляются в бесконечность вдоль двух лучей. Действительный корень движется в бесконечность по отрицательной действительной полуоси. При  $k = 10^9$  траектории корней проходят через точки  $-57,5 \pm j906,6$  и  $-3293,3$ . Две ветви траекторий пересекают мнимую ось в точках  $\pm j1097,3$ , что соответствует значению параметра  $k = 1,51 \cdot 10^9$ . Система перестает быть устойчивой при дальнейшем увеличении параметра.

### 7.3. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА КАЧЕСТВА

Качество процессов управления в системе, которая испытывает стохастические воздействия, оценивается путем вычисления статистических характеристик выходного случайного процесса. Предполагается, что линейная система с импульсной характеристикой  $k(t)$  является асимптотически устойчивой и входное воздействие на эту систему является стационарным эргодическим случайным процессом с известными характеристиками: математическим ожиданием  $m_u$  и дисперсией  $D_u$ , корреляционной функцией  $R_u(\tau)$  и спектральной плотностью  $S_u(\omega)$ . В этих условиях математическое ожидание установившейся реакции системы равно

$$M_y(t) = M \int_0^{\infty} k(\rho) u(t - \rho) d\rho = m_u \int_0^{\infty} k(\rho) d\rho.$$

Будем в дальнейшем без ограничения общности предполагать, что математические ожидания входного и выходного процессов равны нулю.

Автокорреляционная функция установившегося выходного процесса находится из выражения

$$R_y(t,s) = M[y(t) y(s)] = \int_0^{\infty} k(\theta) \int_0^{\infty} k(\eta) M[u(t - \theta) u(s - \eta)] d\eta d\theta.$$

В силу стационарности входного процесса

$$M[u(t - \theta) u(s - \eta)] = R_u(\tau - \eta + \theta),$$

поэтому

$$R_y(\tau) = \int_0^{\infty} k(\theta) \int_0^{\infty} k(\eta) R_u(\tau - \eta + \theta) d\eta d\theta.$$

Спектральная плотность выходного случайного процесса определяется соотношением

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \Big|_{\beta=\tau-\eta+\theta} = \\ &= \int_0^{\infty} k(\theta) \exp(-j\omega\theta) d\theta \int_0^{\infty} k(\eta) \exp(j\omega\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} R_u(\beta) \exp(-j\omega\beta) d\beta = \\ &= H(j\omega) H(-j\omega) S_u(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_u(\omega). \end{aligned}$$

Взаимная корреляционная функция выхода ко входу находится из соотношения

$$\begin{aligned} R_{yu}(t, s) &= M[y(t) u(s)] = \\ &= \int_0^{\infty} k(\theta) M[u(t - \theta) u(s)] d\theta = \int_0^{\infty} k(\theta) R_u(\tau + \theta) d\theta = R_{yu}(\tau). \end{aligned}$$

Аналогично взаимная корреляционная функция входа к выходу равна

$$R_{uy}(\tau) = \int_0^{\infty} k(\theta) R_u(\tau - \theta) d\theta.$$

Заметим, что поскольку выражения для взаимных корреляционных функций имеют вид интеграла свертки, то, например,  $R_{uy}(\tau)$  можно рассматривать как установившуюся реакцию системы на входной сигнал  $R_u(\tau)$ .

Взаимные спектральные плотности выхода ко входу и входа к выходу находятся в виде

$$S_{uy}(\omega) = H(j\omega) S_u(\omega); \quad S_{yu}(\omega) = H(-j\omega) S_u(\omega).$$

Дисперсию выходного случайного процесса можно найти из соотношения

$$Dy(t) = My^2(\tau) = R_y(0) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega.$$

В том случае, когда выражение для спектральной плотности является дробно-рациональным, вычисление дисперсии можно выполнить по таблицам Мак-Ленна [4,5] или используя прямой матричный метод.

Пусть

$$S(\omega) = B(j\omega)/(A(j\omega)A(-j\omega)),$$

где многочлен  $B(j\omega) = b_1(j\omega)^{2n-2} + b_2(j\omega)^{2n-4} + \dots + b_n$ , а многочлен  $A(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n$  имеет корни только в левой полуплоскости.

Тогда интеграл:

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = (-1)^{n+1} N/(2a_0 G),$$

где  $G$  — определитель матрицы Гурвица многочлена  $A(j\omega)$ ,  $N$  — определитель матрицы, которая получается из матрицы Гурвица многочлена  $A(j\omega)$  заменой первой строки коэффициентами многочлена  $B(j\omega)$ .

## Примеры

1. На систему с передаточной функцией  $H(s)$  и импульсной функцией  $k(t)$  воздействует стационарный случайный процесс с постоянной спектральной плотностью — белый шум:

$$S_u(\omega) = a^2; \quad R_u(\tau) = a^2 \delta(\tau).$$

Выходной процесс также стационарен, его дисперсию можно определить по выражению

$$Dy(t) = R_y(0) = \int_0^{\infty} k(\theta) \int_0^{\infty} k(\eta) a^2 \delta(\theta - \eta) d\theta d\eta =$$

$$= a^2 \int_0^{\infty} k(\theta)^2 d\theta$$

или по выражению

$$Dy(t) = a^2 (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega.$$

Взаимная спектральная плотность входа к выходу процесса пропорциональна амплитудной частотной характеристике системы  $S_{uy}(\omega) = a^2 |H(j\omega)|^2$ , а взаимная корреляционная функция входа к выходу пропорциональна импульсной функции системы

$$R_{uy}(\tau) = \int_0^{\infty} k(\theta) a^2 \delta(\tau - \theta) d\theta = a^2 k(\theta).$$

Идеализация входного случайного воздействия белым шумом допустима тогда, когда в полосе пропускания линейной системы спектральная плотность входного воздействия мало изменяется, что имеет место, когда эффективная полоса пропускания системы более узкая по сравнению с полосой частот входного воздействия.

Пусть  $H(s) = 1/(Ts + 1)$ , интенсивность белого шума  $a^2$ , дисперсия выходного шума равна

$$Dy(t) = a^2 (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + T^2 \omega^2)^{-1} d\omega = a^2 (2T\pi)^{-1} \arctg 0 \Big|_{-\infty}^{\infty} = a^2 (2T)^{-1}.$$

2. На систему с передаточной функцией  $H(s) = 1/(Ts + 1)$  воздействует шум со спектральной функцией  $S_u(\omega) = 2b/(\alpha^2 + \omega^2)$ . Найдем характеристики выходного сигнала.

Спектральная плотность выходного сигнала системы определяется выражением

$$S_y(\omega) = 2b/((T^2 \omega^2 + 1)(\alpha^2 + \omega^2)),$$

которое имеет дробно-рациональный вид, поэтому для вычисления дисперсии выходного шума воспользуемся матричным методом. Здесь

$$n = 2;$$

$$B(j\omega) = 2b;$$

$$A(j\omega) = (1 + jT\omega)(\alpha + j\omega) = T(j\omega)^2 + (T\alpha + 1)(j\omega) + \alpha;$$

матрица Гурвица многочлена  $A(j\omega)$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} (T\alpha + 1) & 0 \\ T & \alpha \end{pmatrix},$$

поэтому  $G = \alpha(T\alpha + 1)$ , следовательно,

$$N = \det \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ T & \alpha \end{pmatrix} = -2bT.$$

Дисперсия выходного случайного процесса, таким образом, равна

$$Dy(t) = (-1)^3 (-2bT)/(2T(\alpha(T\alpha + 1))) = b/(\alpha(T\alpha + 1)).$$

3. Определена спектральная плотность ошибки воспроизведения входного случайного сигнала:

$$S_e(\omega) = (\omega^2 + 2)/((\omega^4 - \omega^2 + 1)(\omega^2 + 1)).$$

Дробно-рациональный вид этого выражения позволяет вычислить дисперсию ошибки воспроизведения. Из выражения спектральной плотности находим многочлен  $A(j\omega) = ((j\omega)^2 + (j\omega) + 1)(j\omega + 1)$ , у которого  $n = 3$ ;  $a_0 = 1$ ;  $a_1 = 2$ ;  $a_2 = 2$ ;  $a_3 = 1$ , и многочлен  $B(j\omega) = -(j\omega)^2 + 2$ , у которого  $2n - 2 = 4$ , поэтому  $b_1 = 0$ ;  $b_2 = -1$ ;  $b_3 = 2$ .

Для многочлена  $A(j\omega)$  матрица Гурвица принимает вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому  $G = 3$ ,  $N = 5$  и дисперсия ошибки воспроизведения равна  $5/6$ .

4. Двигатель с передаточной функцией  $9/(s(0,01s + 1))$ , охваченный отрицательной обратной связью, образует замкнутую систему позиционирования. Входной задающий сигнал имеет прямоугольную форму со значениями  $\pm 1$ , смена знака входного сигнала образует стационарный случайный процесс Пуассона с параметром  $\mu$  — средней частотой перемены знака. Найдем средний квадрат ошибки позиционирования.

Корреляционная функция входного случайного процесса [16.4]:

$$R_U(\tau) = \exp(-2\mu|\tau|).$$

Спектральная плотность входного случайного процесса находится преобразованием Фурье его корреляционной функции и в данном случае имеет вид

$$S_U(\omega) = 4\mu/(\omega^2 + 4\mu^2).$$

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке равна

$$H_e(s) = 1 - 9/(0,01s^2 + s + 9) = (0,01s^2 + s)/(0,01s^2 + s + 9),$$

поэтому функция спектральной плотности ошибки позиционирования при  $\mu = 5$  находится в виде

$$S_e(\omega) = 20H_e(j\omega)H_e(-j\omega)/(\omega^2 + 100).$$

Подставляя сюда выражение передаточной функции, получим дробно-рациональное выражение

$$S_e(\omega) = 20B(j\omega)/A(j\omega)A(-j\omega),$$

в котором

$$A(j\omega) = (0,01(j\omega)^2 + j\omega + 9)(j\omega + 10);$$

$$B(j\omega) = (0,01(j\omega)^2 + (j\omega))(0,01(-j\omega)^2 - (j\omega)) = 0,01^2(j\omega)^4 + (j\omega)^2.$$

Для этих выражений

$$n = 3; a_0 = 0,01; a_1 = 1,1; a_2 = 19,0; a_3 = 90;$$

$$b_1 = 0,01^2; b_2 = 1; b_3 = 0.$$

Матрица Гурвица многочлена  $A(j\omega)$  принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1,1 & 90 & 0 \\ 0,01 & 19,0 & 0 \\ 0 & 1,1 & 90 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$N = \det \begin{pmatrix} 0,01^2 & 1 & 0 \\ 0,01 & 19 & 0 \\ 0 & 1,1 & 90 \end{pmatrix},$$

откуда находим:  $G = 1800$ ;  $N = -0,729$ .

Искомое значение среднего квадрата ошибки позиционирования равно  $D_e = 0,405$ , что в сравнении с дисперсией входного сигнала  $D_U = R_U(0) = 1$  составляет 40,5 %.

## 7.4. МАШИННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

Современные инструментальные средства анализа и синтеза систем управления представлены множеством различных специализированных программных пакетов и комплексов, которые позволяют в диалоговом режиме выполнять операции над матрицами и полиномами, вычислять временные и частотные характеристики, строить корневые годографы, анализировать чувствительность и устойчивость, проверять управляемость и наблюдаемость системы, находить ее полюса и нули, сравнивать переходные процессы в системе по интегральным критериям и находить лучший, определять параметры и характеристики стохастических сигналов на входе и на выходе системы, составлять и преобразовывать математические модели исследуемой системы.

Эти программные средства обладают развитым сервисом, что позволяет строить и сравнивать графики нескольких процессов, изображать взаимные зависимости, фазовые кривые и портреты, строить характеристики в линейном и логарифмическом масштабе, строить диаграммы, изображать и преобразовывать структурные модели системы, наносить на поле графика текстовые пояснения, при этом графические построения могут быть выполнены в двух- и трехмерном представлении.

Известны фирменные и университетские программные пакеты анализа и синтеза систем управления: **LSAP** — США, Ливерморская национальная лаборатория; **TUTSIM** — США, Станфордский университет; **CLADP** — Великобритания, Кембридж; **KEDDC** — Германия, Рурский университет; **POLPAC/MODPAC/SIMNON** — Норвегия, Лундский университет; **MATRIX<sub>x</sub>** — фирмы Integrated Systems, Inc.; **SIMULINK** в среде **MATLAB** известной фирмы Math Works, Inc.; **MARS** — Украина, Институт кибернетики. Среди отечественных инструментальных программных средств известны разработки Академии авиационного и космического приборостроения, Санкт-Петербурга; Московского инженерно-физического института; Московского государственного технического университета; Института проблем управления РАН, Москва.

Программные комплексы **TUTSIM**, **MATRIX<sub>x</sub>**, **SIMULINK** позволяют исследовать модели любых динамических систем, которые испытывают любые внешние воздействия. Комплексы обеспечивают команды изменения структуры модели, ее параметров, выходных блоков и диапазонов рассчитываемых данных; команды одиночного и многократного запуска, останова и продолжения процесса моделирования с выводом графиков и числовых данных на экран, принтер или в файл; команды графического сервиса, позволяющие изображать оси, сетку, маркировку, комментарии к графикам, строить фазовые кривые или взаимозависимости и прочее. Комплексы **TUTSIM**, **MATRIX<sub>x</sub>**, **SIMULINK** располагают различными функциональными блоками для моделирования любых непрерывных и дискретных, линейных и нелинейных динамических систем, испытывающих детерминированные и стохастические воздействия.

В Приложении приведены основные команды пакетов **TUTSIM**, **MATRIX<sub>x</sub>** и **SIMULINK-MATLAB**, а также их основные функциональные блоки.

Оценка качества процессов управления с использованием программных инструментальных средств осуществляется путем прямого моделирования и сравнения числовых показателей или вычисленных интегральных оценок процессов.

### Пример

Сравнить переходные процессы в системе, передаточная функция разомкнутой части которой имеет вид

$$W(s) = k(Ts + 1)/(s(0,01s^2 + 0,15s + 1)(0,1s + 1)),$$

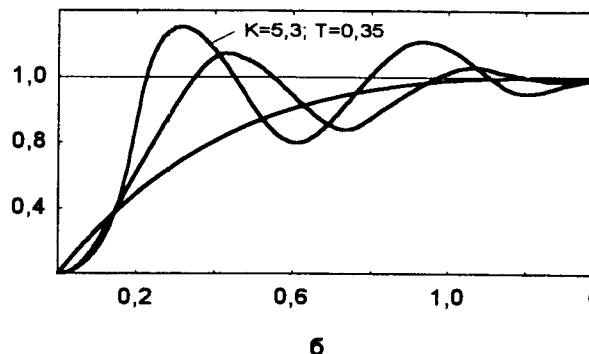
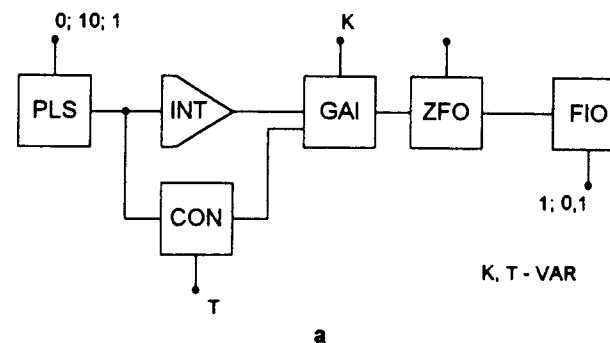


РИС. 72

в зависимости от параметров  $k, T$ . На рис. 72, а, б представлены структурная схема модели системы в терминах моделирующего пакета **MATRIX<sub>x</sub>** и результаты моделирования, по которым можно судить о качестве процесса управления.

## 7.5. УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти величину установившейся ошибки при обработке единичного ступенчатого сигнала системой с пропорциональным регулятором и  $W_0(s) = 1/(\alpha s^2 + \beta s + 1)$ .

2. Найти первые три коэффициента ошибок для системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(s) = k(b_0 s^2 + b_1 s + 1)/(s^2(a_0 s^2 + 1)).$$

3. Определить вынужденную ошибку следящей системы при обработке линейного входного сигнала  $u(t) = 12 + 4t$  рад., если в разомкнутом состоянии эта система имеет передаточную функцию  $W(s) = 90/(s(0,05s + 1)(0,1s + 1))$ .

4. Переходная функция системы, найденная аналитически, имеет вид

$$h(t) = 1 - 0,055e^{-53t} + 1,1e^{-3,3t} \sin(11,8t + 1,1).$$

Найти показатели качества этого переходного процесса для  $\Delta = 0,05$ .

5. Построить приближенно переходный процесс для системы с известной вещественной частотной характеристикой:

$$\begin{aligned} \text{а) } U(\omega) &= 1; & 0 \leq \omega \leq \omega_0; \\ U(\omega) &= 0; & \omega > \omega_0; \\ \text{б) } U(\omega) &= 1 - \omega/\omega_0; & 0 \leq \omega \leq \omega_0; \\ U(\omega) &= 0; & \omega > \omega_0. \end{aligned}$$

6. Определить значение коэффициента усиления  $k$ , при котором обработка системой единичного ступенчатого сигнала будет иметь наименьшую интегральную квадратичную ошибку. Передаточная функция разомкнутой части системы имеет вид

$$W(s) = k/(s(0,04s + 1)(0,12s + 1)).$$

7. Для системы с передаточной функцией разомкнутой части

$$W(s) = 1/(s^3 + \alpha s^2 + \beta s + 1)$$

найти значения параметров  $\alpha, \beta$ , которые бы минимизировали интегральную оценку  $J_0$  при обработке замкнутой системой единичного ступенчатого воздействия.

8. Найти характеристики случайного процесса на выходе динамического звена с импульсной характеристикой  $k(t) = te^{-5t}$ ,  $t \geq 0$ , если входной случайный процесс:

- а)  $\xi(t) = b$ ,  $b$  равномерно распределено на  $[-8, 12]$ ;
- б)  $\xi(t) = 4\sin(2\pi t + \varphi)$ ,  $\varphi$  равномерно распределена на  $[0, 2\pi]$ ;
- в)  $\xi(t)$  — белый шум с постоянной составляющей, равной  $2$  В, и интенсивностью  $4$  В<sup>2</sup> · с;
- г)  $x(t)$  — процесс с автокорреляционной функцией  $R(\tau) = 2e^{-3|\tau|}$ .

9. Найти средний квадрат выходного сигнала звена, у которого:

- а)  $k(t) = te^{-5t}$ ,  $t \geq 0$  и на которое воздействует белый шум интенсивностью  $3$  В<sup>2</sup> · с;
- б)  $k(t) = \delta(t) - 2e^{-2t}$ ,  $t \geq 0$  и на которое воздействует шум с корреляционной функцией  $R(\tau) = 10(e^{-2|\tau|} + 1)$ ;
- в)  $W(s) = s/(s^2 + 15s + 50)$  и на которое воздействует белый шум интенсивностью  $1,5$  В<sup>2</sup> · с;
- г)  $k(t) = te^{-5t}$ ,  $t \geq 0$  и на которое воздействует шум со спектральной плотностью  $S(\omega) = 150/(\omega^2 + 81)$ .

10. Вычислить среднеквадратичную ошибку слежения для системы:

- а) структура которой изображена на рис. 73; на вход подаются полезный сигнал  $u(t)$  и белый шум  $\mu(t)$  ин-

# 8 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ В ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

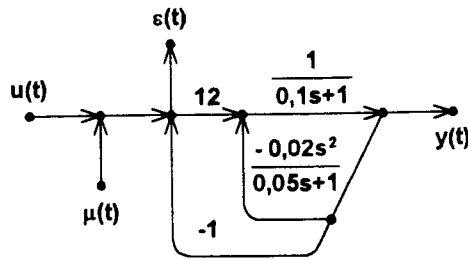


РИС. 73

тенсивностью  $3B^2 \cdot c$ . Корреляционная функция полезного сигнала  $R_u(\tau) = 2e^{-3|\tau|}$ .

б) передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(s) = 250(0,62s + 1) / (s(0,002s + 1)(0,02s + 1)(0,01s + 1)(2s + 1)),$$

а на вход системы воздействует белый шум интенсивностью  $10^{-3} B^2 \cdot c$ .

*Управляемость и наблюдаемость — Устойчивость линейных дискретных систем — Характеристики дискретных автоматических систем — Анализ качества процессов управления — Упражнения.*

## 8.1. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

Рассматривается линейная дискретная n-мерная система, представленная своей внутренней моделью состояния:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(n)}: \quad x(k+1) &= Mx(k) + Nu(k), \quad x(0); \\ y(k) &= Cx(k). \end{aligned}$$

**Определение.** Система  $\Sigma^{(n)}$  вполне управляема, если существует управляющая последовательность  $\{u(k)\}$ , которая переводит систему из начального состояния в произвольное конечное состояние за конечное число шагов.

**Теорема** (R. Kalman, 1961)

*Система  $\Sigma^{(n)}$  вполне управляема тогда и только тогда, когда ранг матрицы управляемости  $(N: MN: M^2N: \dots: M^{n-1}N)$  равен n.*

**Доказательство**

Движение системы  $\Sigma^{(n)}$  при известной управляющей последовательности  $\{u(k)\}$  за n шагов достигнет состояния:

$$x(n) = M^n x(0) + M^{n-1} Nu(0) + M^{n-2} Nu(1) + \dots + Nu(n-1).$$

Запишем это выражение в матричной форме:

$$x(n) - M^n x(0) = (N : MN : M^2 N : \dots : M^{n-1} N) \times \\ \times (u(n-1) u(n-2) \dots u(1) u(0))^T.$$

Это выражение представляет собой неоднородное матричное алгебраическое уравнение относительно  $n$  переменных  $u(0), u(1), \dots, u(n-1)$ , которое может быть разрешимо тогда и только тогда, когда  $\text{rang}$  матрицы  $(N : MN : M^2 N : \dots : M^{n-1} N)$  равен числу неизвестных системы.

## Примеры

### 1. Система

$$\Sigma^{(2)}: M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; N = (1 \ 1)^T$$

не является вполне управляемой, поскольку не удовлетворяет требованиям теоремы: ранг матрицы управляемости не равен двум:

$$(N : MN) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 2. Для системы

$$\Sigma^{(2)}: M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; N = (1 \ -1)^T; x(0) = (4 \ 2)^T$$

найдем управляющую последовательность для перевода ее в состояние  $x(2) = (0, 0)^T$ .

$$x(2) = M^2 x(0) + MNu(0) + Nu(1);$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} u(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(1),$$

откуда следует, что  $2u(0) + u(1)$  равно одновременно  $-14$  и  $4$ . Состояние  $(0, 0)^T$  не достижимо. Система не является вполне управляемой потому, что  $\text{rang}(N : MN) \neq 2$ . Однако это не означает, что из данного начального состояния все состояния не достижимы. Например, состояние  $x(2) = (20, 10)^T$  — достижимо. Найдем управляющую последовательность для перевода системы в это состояние:

$$x(2) = M^2 x(0) + MNu(0) + Nu(1);$$

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} u(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(1),$$

откуда следует, что  $2u(0) + u(1) = 6$ . К примеру, управляющие последовательности

$$\{u(0) = -1; u(1) = 8\},$$

или

$$\{u(0) = 1; u(1) = 4\}$$

могут выполнить заданный перевод системы.

**Определение.** Система  $\Sigma^{(n)}$  вполне наблюдаема, если существует такое конечное  $k$ , что начальное состояние  $x(0)$  системы может быть определено по значениям управляющей  $\{u(0), u(1), \dots, u(k-1)\}$  и выходной  $\{y(0), y(1), \dots, y(k-1)\}$  последовательностей.

## Теорема (R. Kalman, 1961)

Система  $\Sigma^{(n)}$  вполне наблюдаема тогда и только тогда, когда ранг матрицы наблюдаемости

$$(C^T : M^T C^T : (M^T)^2 C^T : \dots : (M^T)^{n-1} C^T)$$

равен  $n$ .

## Доказательство

Не ограничивая общности, положим  $u(k) = 0, k = 0, 1, 2, \dots$ , и пусть известны все значения выходной последовательности



сти  $y(0), y(1), y(2), \dots, y(p-1)$ . Запишем уравнения выхода для каждого  $k = 0, 1, 2, \dots, (p-1)$ :

$$y(0) = Cx(0);$$

$$y(1) = Cx(1) = CMx(0);$$

$$y(2) = Cx(2) = CMx(1) = CM^2x(0);$$

$$y(p-1) = Cx(p-1) = CM^{p-1}x(0).$$

Воспользуемся матричной записью этих соотношений:

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(p-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CM \\ \dots \\ CM^{p-1} \end{pmatrix} x(0).$$

Имеем неоднородное матричное алгебраическое уравнение относительно  $p$  неизвестных координат вектора  $x(0)$ . Это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} C \\ CM \\ \dots \\ CM^{p-1} \end{pmatrix}$$

равен числу неизвестных.

## Примеры

### 1. Система

$$\Sigma^{(2)}: M = \begin{pmatrix} 0,45 & -0,25 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; N = (1 \ 1)^T; C = (1 \ -0,25)$$

не позволяет восстановить начальный вектор, поскольку она не наблюдаема. В самом деле,

$$\text{rang}(C^T : M^T C^T) = \begin{pmatrix} 1 & -0,25 \\ 0,2 & -0,05 \end{pmatrix} \neq 2.$$

### 2. Система

$$\Sigma^{(2)}: M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; N = (1 \ 1)^T; C = (1 \ 2)$$

оказывается вполне наблюдаемой, поскольку

$$\text{rang}(C^T : M^T C^T) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 2.$$

Из начального состояния система выполнила один шаг под воздействием  $u(0) = -4$ . Выходной сигнал системы был измерен в начальный момент  $y(0) = 9$  и после первого шага  $y(1) = 6$ . Восстановить начальное состояние системы.

Составим уравнения выхода до и после первого шага:

$$y(0) = Cx(0) + Nu(0)$$

$$y(1) = CMx(0) + Nu(1)$$

Искомая система уравнений относительно неизвестных  $x_1(0), x_2(0)$  после подстановки числовых данных принимает вид

$$x_1(0) + 2x_2(0) = 9;$$

$$3x_1(0) - 3x_2(0) = 18.$$

Откуда находим, что  $x_1(0) = 7; x_2(0) = 1$ .

Особенность дискретных систем в отличие от непрерывных состоит в том, что свойства управляемости и наблюдаемости зависят от шага квантования, поскольку условия управляемости и наблюдаемости зависят от матриц системы, которые, в свою очередь, зависят от периода квантования. Для некоторых значений шага квантования дискретная система может потерять управляемость или наблюдаемость.

### Пример

Непрерывная модель гармонического осциллятора задается матрицами:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = (0 \quad 1)^T; \quad \mathbf{C} = (0 \quad 1).$$

Эта система всегда управляема и наблюдаема.

Дискретная модель гармонического осциллятора задается матрицами

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos \omega h & -\sin \omega h \\ \sin \omega h & \cos \omega h \end{pmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \omega^{-1}(1 - \cos \omega h) \\ \omega^{-1} \sin \omega h \end{pmatrix}.$$

Условия управляемости и наблюдаемости нарушаются, когда  $h = m\pi/\omega$ , поскольку матрица управляемости имеет определитель, равный  $2\omega^{-2} \sin \omega h (1 - \cos \omega h)$ , а матрица наблюдаемости имеет определитель, равный  $\sin \omega h$ .

## 8.2. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Рассматривается линейная дискретная система управления, представленная своей внутренней моделью состояния:

$$\sum^{(n)}: \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}u(k), \quad \mathbf{x}(0); \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

либо внешней моделью типа "вход-выход":

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)U(z); \\ H(z) &= \mathbf{B}_m(z)/A_n(z). \end{aligned}$$

Для линейных дискретных систем понятия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости вводятся аналогично тому, как это вводилось для непрерывных линейных систем. Эти свойства являются свойствами общесистемными, а не отдельных траекторий.

Устойчивость линейной дискретной системы полностью определяется ее собственными числами — корнями характеристического уравнения системы. Характеристическое уравнение может быть определено по любой модели системы:

- $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{M}) = 0$  — для модели состояния;
- $A_n(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n = 0$  — для модели "вход-выход".

### Теорема

*Линейная дискретная система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда ее собственные числа лежат строго внутри единичного круга.*

Справедливость этого утверждения следует (3.2) из свойств дискретного преобразования  $z = e^{sh}$ , которое отображает левую комплексную  $s$ -полуплоскость во внутренность единичного круга на комплексной  $z$ -плоскости.

Покажем справедливость этой теоремы прямо, вычислив собственное движение системы.

Собственное движение системы описывается однородным уравнением:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(0);$$

решение этого уравнения:  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{M}^k \mathbf{x}(0)$ . Положим, не ограничивая общности, что все собственные числа матрицы  $\mathbf{M}$  действительные и различные, тогда эту матрицу можно привести к диагональному виду:

$$\mathbf{M} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Для этого случая решение уравнения движения принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k) \mathbf{x}(0) = \\ &= (\lambda_1^k x_1(0), \lambda_2^k x_2(0), \dots, \lambda_n^k x_n(0))^T. \end{aligned}$$

Для достижения асимптотической устойчивости системы все ее движения должны стремиться к нулю с ростом  $k$ , но это возможно, как следует из выражения для  $\mathbf{x}(k)$ , лишь когда все  $|\lambda_i| < 1$ .

Для определения устойчивости линейной дискретной системы без определения ее собственных чисел используют алгебраические и частотные критерии.

**Критерий Рауса-Гурвица**

Выполним над характеристическим многочленом дискретной системы

$$A_n(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n$$

билинейное **преобразование Мёбиуса**:  $\lambda = (\mu + 1)/(\mu - 1)$ , которое осуществляет отображение единичного круга комплексной плоскости на левую комплексную полуплоскость. При этом характеристический многочлен  $A_n(\lambda)$  системы преобразуется в некий многочлен  $A_n(\mu)$ . Если корни этого многочлена — левые, то корни многочлена  $A_n(\lambda)$  — внутри единичного круга; если среди корней  $A_n(\mu)$  есть чисто мнимые, то и среди корней  $A_n(\lambda)$  есть корни, лежащие на единичной окружности. Таким образом, критерий устойчивости над многочленом  $A_n(\lambda)$  сводится к применению критерия Гурвица к многочлену  $A_n(\mu)$ .

**Пример**

Задан характеристический полином дискретной системы второго порядка:

$$A_2(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2$$

Выполнив билинейное преобразование  $\lambda = (\mu + 1)/(\mu - 1)$  над этим многочленом, получим

$$A_2(\mu) = (1 + \mu)^2 + \alpha_1(1 - \mu^2) + \alpha_2(1 - \mu)^2 = (1 - \alpha_1 + \alpha_2)\mu^2 + 2(1 - \alpha_2)\mu + (1 + \alpha_1 + \alpha_2)$$

Для этого многочлена критерий Гурвица устанавливает условия

$$1 - \alpha_2 > 0; \quad 1 - \alpha_1 + \alpha_2 > 0; \quad 1 + \alpha_1 + \alpha_2 > 0,$$

откуда следуют параметрические условия асимптотической устойчивости дискретной системы:

$$\alpha_2 < 1; \quad \alpha_2 > |\alpha_1| - 1.$$

**Критерий Джури (Е. Джури, 1958)**

По характеристическому многочлену дискретной системы составляется таблица так, что первая и вторая строки ее — коэффициенты характеристического многочлена, записанные в прямом и обратном порядке. Третья строка получается из второй умножением на  $\alpha_n/\alpha_0 = \beta_n$  и вычитанием результата из первой строки. Четвертая строка — третья, записанная в обратном порядке. Таблица Джури имеет  $2n + 1$ -ю строку.

$\alpha_0$	$\alpha_1$	...	$\alpha_{n-1}$	$\alpha_n$	$\beta_n = \alpha_n/\alpha_0$
$\alpha_n$	$\alpha_{n-1}$	...	$\alpha_1$	$\alpha_0$	
$\alpha_{0(n-1)}$	$\alpha_{1(n-1)}$	...	$\alpha_{n-1(n-1)}$		$\beta_{n-1} = \alpha_{n(n-1)}/\alpha_{0(n-1)}$
$\alpha_{n(n-1)}$	$\alpha_{n-1(n-1)}$	...	$\alpha_{0(n-1)}$		
$\alpha_{\alpha(n-2)} = \alpha_{\alpha(n-1)} - \beta_{n-1}\alpha_{n(n-1)}$					

- **Корни характеристического уравнения системы лежат внутри единичного круга тогда и только тогда, когда все элементы  $\alpha_0, \alpha_{\alpha(m)}, m = 0, 1, \dots, n - 1$  первого столбца положительны.**

**Примеры**

1. Для характеристического полинома дискретной системы второго порядка

$$A_2(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2$$

таблица Джури принимает вид

1	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_2 = \alpha_2$
$\alpha_2$	$\alpha_1$	1	
$1 - \alpha_2^2$	$\alpha_1(1 - \alpha_2)$		$\beta_1 = \alpha_1/(1 + \alpha_2)$
$\alpha_1(1 - \alpha_2)$	$1 - \alpha_2^2$		
$(1 - \alpha_2^2) - \alpha_1^2(1 - \alpha_2)/(1 + \alpha_2)$			

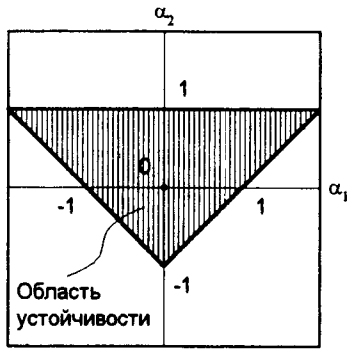


РИС. 74

Отсюда находим необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости системы:

$$1 - \alpha_2^2 > 0;$$

$$(1 - \alpha_2^2) - \alpha_1^2(1 - \alpha_2)/(1 + \alpha_2) > 0.$$

Иначе:  $|\alpha_2| < 1$ ;  $|\alpha_1/(1 + \alpha_2)| < 1$ , что совпадает с результатом предыдущего примера. На рис. 74 представлена область устойчивости системы в плоскости параметров  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$

2. Используя алгебраические критерии, можно определить, что для асимптотической устойчивости замкнутой дискретной системы, у которой в прямом тракте имеется идеальный импульсный элемент с периодом квантования 1 с, восстановитель нулевого порядка и непрерывная часть с передаточной функцией:

$$W(z; k) = k/(z^2 + 1,5z);$$

достаточно иметь  $0 < k < 3,954$ .

3. Замкнутая дискретная система имеет характеристическое уравнение

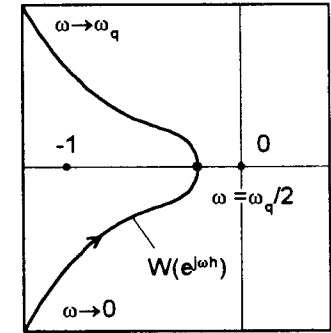
$$27z^3 + 27z^2 + 9z + 1 = 0.$$

Билинейное преобразование  $z = (1 + s)/(1 - s)$  этого уравнения приводит к уравнению  $s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$ , которое, согласно критерию Гурвица, имеет корни в левой полуплоскости. Значит, характеристические числа анализируемой дискретной системы располагаются внутри единичного круга. Система асимптотически устойчива.

**Критерий Найквиста** (Н. Nyquist, 1932)

Пусть дискретная система задана внешней моделью в виде передаточной функции  $W(z)$  разомкнутой части.

РИС. 75



**Определение.** Отображение  $W(e^{j\omega h})$  при изменении аргумента  $\omega$  от 0 до частоты квантования  $\omega_q = 2\pi/h$  называют частотным годографом Найквиста дискретной системы.

• Если разомкнутая дискретная система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы достаточно, чтобы годограф Найквиста не охватывал контрольную точку  $(-1, j0)$  на действительной оси.

**Пример**

Передаточная функция разомкнутой части дискретной системы имеет вид

$$W(z) = 0,64z/(z^2 - 1,21z + 0,21).$$

Частотный годограф Найквиста определяется выражением

$$W(e^{j\omega h}) = 0,64 e^{j\omega h} / (e^{j2\omega h} - 1,21e^{j\omega h} + 0,21).$$

В этом выражении следует сделать замену Эйлера:  $e^{j\omega h} = \cos \omega h + j \sin \omega h$ , отделить действительную и мнимую части и, изменяя частоту от 0 до  $\pi/h$ , построить на комплексной плоскости годограф  $W(e^{j\omega h})$  и его зеркальное отражение при изменении частоты от  $\pi/h$  до  $2\pi/h$ .

На рис. 75 изображен этот годограф, который проходит правее контрольной точки, и, следовательно, замкнутая дискретная система будет устойчивой.

### 8.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Структура дискретной автоматической системы изображена на рис. 76. Опишем основные соотношения в этой системе:

- передаточная функция замкнутой дискретной системы

$$H^*(s) = G^*(s)/(1 + G^*(s));$$

- уравнение выхода в изображениях

$$Y^*(s) = H^*(s)U^*(s);$$

- уравнение ошибки в изображениях

$$E^*(s) = (1 - H^*(s))U^*(s);$$

- передаточная функция ошибки системы

$$H_e^*(s) = 1 - H^*(s);$$

- уравнение выхода

$$y(kh) = \sum_{m=0}^k g((k-m)h)u(mh);$$

- временная характеристика

$$g(kh).$$

Вынужденные процессы в дискретной системе описываются уравнением

$$y^b(kh) = \sum_{m \geq 0} g(mh) u((k-m)h).$$

Используем это соотношение для определения вынужденной реакции на гармоническое воздействие  $u(kh) = Ue^{j(\omega kh)}$ :

$$\begin{aligned} y^b(kh) &= \sum_{m \geq 0} g(mh) Ue^{j(\omega(k-m)h)} = \\ &= \left[ \sum_{m \geq 0} g(mh) e^{-j(\omega mh)} \right] Ue^{j(\omega kh)} = H^*(j\omega) u(kh), \end{aligned}$$

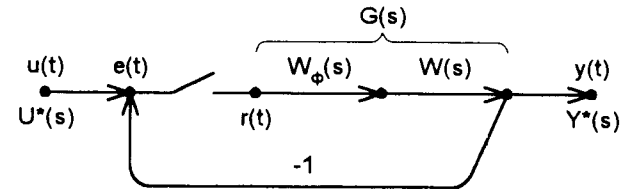


РИС. 76

Функцию  $H^*(j\omega)$  называют **частотной характеристикой** дискретной системы.

Найдем аналогично тому, как это делалось в непрерывных системах, вынужденную ошибку отработки произвольного входного воздействия через внутренние свойства системы и производные внешнего воздействия.

Подставим в формулу для вынужденного движения разложение в ряд Тейлора внешнего воздействия

$$u((k-m)h) = \sum_{r \geq 0} (-1)^r u^{(r)}(kh)(mh)^r / r!,$$

получим

$$y^b(kh) = \sum_{r \geq 0} [(-1)^r \sum_{m \geq 0} g(mh)(mh)^r] u^{(r)}(kh) / r!.$$

Выражение, стоящее в прямых скобках, представляет собой **моменты порядка r решетчатой функции временной характеристики** системы, которые обозначим  $\mu_r$ . Моменты  $\mu_r$  совпадают со значением r-й производной по s от передаточной функции системы  $H^*(s)$  при  $s = 0$ . Теперь можно вычислить вынужденный процесс дискретной системы:

$$y^b(kh) = \sum_{r \geq 0} \mu_r u^{(r)}(kh) / r!$$

и **вынужденную ошибку**  $e^b(kh) = u(kh) - y^b(kh)$  отработки входного сигнала:

$$e^b(kh) = (1 - \mu_0)u(kh) - \sum_{r > 1} \mu_r u^{(r)}(kh) / r! = \sum_{r \geq 0} c_r u^{(r)}(kh) / r!,$$

где  $c_0 = 1 - \mu_0$ ;  $c_r = -\mu_r$ ;  $r = 1, 2, \dots$  — **коэффициенты ошибки дискретной системы**, которые можно вычислить, используя соотношения

$$c_r = d^r H_e^*(s) / ds^r |_{s=0}.$$

Величину вынужденной установившейся ошибки можно оценить также, используя свойства z-преобразования, в частности теорему о конечном значении (16.2):

$$e^b(kh) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kh) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z),$$

где  $E(z) = (1 - H(z))U(z) = H_e(z)U(z)$ .

### Примеры

1. При обработке ступенчатого воздействия  $u(kh) = \alpha_0$ ,  $U(z) = \alpha_0 z / (z - 1)$  установившаяся ошибка равна

$$e^b(kh) = \lim_{z \rightarrow 1} \alpha_0 H_e(z),$$

а при обработке линейного воздействия  $u(kh) = \alpha_1 kh$ ,  $U(z) = \alpha_1 h z / (z - 1)^2$  установившаяся ошибка равна

$$e^b(kh) = \lim_{z \rightarrow 1} \alpha_1 h H_e(z) / (z - 1).$$

2. Разомкнутая часть системы имеет дискретную передаточную функцию:

$$W(z) = k_0(1 - e^{-h}) / ((z - 1)(z - e^{-h})).$$

Передаточная функция ошибки замкнутой системы:

$$H_e(z) = 1 / (1 + W(z)) = (z - 1)(z - e^{-h}) / ((z - 1)(z - e^{-h}) + k_0(1 - e^{-h})),$$

поэтому

$$\lim_{z \rightarrow 1} \alpha_0 H_e(z) = 0.$$

При обработке ступенчатого воздействия установившаяся ошибка равна нулю, а установившаяся ошибка обработки линейного воздействия равна  $\alpha_1 h / k_0$ . Этот же результат можно получить, используя универсальный метод коэффициентов ошибок. В нашем случае

$$H_e^*(s) = (e^{sh} - 1)(e^{sh} - e^{-h}) / ((e^{sh} - 1)(e^{sh} - e^{-h}) + k_0(1 - e^{-h})) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 / 2 + \dots$$

поэтому

$$(e^{sh} - 1)(e^{sh} - e^{-h}) = ((e^{sh} - 1)(e^{sh} - e^{-h}) + k_0(1 - e^{-h}))(c_0 + c_1 s + c_2 s^2 / 2 + \dots),$$

иначе

$$(sh + 0,5(sh)^2 + \dots)(1 - e^{-h} + sh + 0,5(sh)^2 + \dots) = ((sh + 0,5(sh)^2 + \dots)(1 - e^{-h} + sh + 0,5(sh)^2 + \dots) + k_0(1 - e^{-h}))(c_0 + c_1 s + c_2 s^2 / 2 + \dots).$$

Находим соотношение для свободных членов:  $k_0(1 - e^{-h})c_0 = 0$  и коэффициентов при sh:

$$(1 - e^{-h}) = (1 - e^{-h})c_0 + k_0(1 - e^{-h})c_1 / h,$$

откуда  $c_0 = 0$ ;  $c_1 = h / k_0$ .

В заключение определим условия безошибочного воспроизведения дискретной системой входного полиномиального сигнала. Пусть сначала этот сигнал нулевого порядка  $u(kh) = \alpha_0$ . Вынужденная ошибка равна нулю при условии, что  $c_0 = H_e^*(0) = 0$ , но это возможно, когда  $(1 + G^*(0))^{-1} = 0$ , что, в свою очередь, возможно, когда, например, непрерывная часть содержит интегратор или дискретная часть содержит звено с передаточной функцией  $1/(e^{sh} - 1)$  — звено с памятью. Для безошибочного воспроизведения полиномиального сигнала порядка q необходимо, чтобы  $c_0 = c_1 = \dots = c_q = 0$ , что возможно, если в прямом тракте системы имеется необходимое число интеграторов и звеньев памяти.

## 8.4. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

Качество процессов управления в дискретной системе оценивается по переходной функции — реакции этой системы на тестовый сигнал в виде единичной ступенчатой функции. Показателями качества являются **время установления, перерегулирование, время нарастания, время запаздывания, число максимумов**.

Следует помнить, что модели дискретных систем правильно описывают поведение этих систем только в моменты квантования. Но истинная реакция — выходной сигнал системы является непрерывной функцией времени, поэтому только для достаточно малого периода квантования можно говорить об адекватном восстановлении непрерывной реакции системы по числовым данным, вычисленным по дискретным моделям. Качество процессов дискретной системы зависит от периода квантования.

Ранее, в 3.3 была установлена связь между  $s$ - и  $z$ -комплексными плоскостями. Качество переходных процессов в дискретной системе, так же как и в непрерывной системе, зависит от местоположения корней характеристического многочлена относительно единичного круга на  $z$ -комплексной плоскости — образа левой  $s$ -полуплоскости.

Например, для непрерывной системы второго порядка переходный процесс имеет экспоненциально колебательный вид (рис. 77, 1), если ее собственные числа — комплексно сопряженная левая пара, собственные числа соответствующей дискретной системы лежат внутри единичного круга и дискретный процесс затухающий колебательный. Если же собственные числа непрерывной системы — чисто мнимая пара, то процесс — незатухающий колебательный (рис. 77, 2), для дискретной системы собственные числа лежат на единичной окружности и их местоположение, зависящее от частоты квантования, может привести к эффекту изменения частоты дискретных колебаний. Если собственные числа левые действительные, то процесс будет экспоненциальным (рис. 77, 3) и для непрерывной, и для дискретной системы. Переходный процесс будет неустойчивым (рис. 77, 4), если у непрерывной системы есть правые характеристические числа, а у соответствующей дискретной системы собственные числа оказываются во внешности единичного круга.

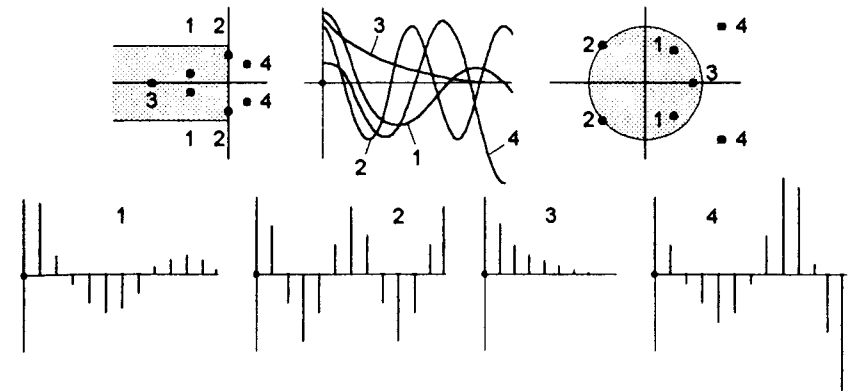


РИС. 77

Для анализа качества процессов дискретной системы, параметры которой могут выбираться, используется метод корневого годографа. Корневой годограф как геометрическое место корней характеристического уравнения дискретной системы на  $z$ -комплексной плоскости в зависимости от изменения некоторого параметра позволяет судить не только о самом факте устойчивости, но и о запасах устойчивости и отдельных показателях качества процессов управления. Поскольку характеристический многочлен является рациональным полиномом относительно  $z$ , то правила построения корневого годографа на  $s$ -плоскости могут быть применимы и в случае построения корневого годографа дискретной системы на  $z$ -плоскости.

### Пример

Непрерывная часть системы имеет передаточную функцию  $W(s) = k_0 / (s(s + 1))$ ,  $k_0 = \text{var}$ , система имеет идеальный квантователь на входе непрерывной части. Дискретная передаточная функция разомкнутой части системы определяется выражением

$$W(z) = k_0 z(1 - e^{-h}) / ((z - 1)(z - e^{-h})).$$

После замыкания дискретная система имеет характеристическое уравнение:

$$(z - 1)(z - e^{-h}) + k_0 z(1 - e^{-h}) = 0,$$

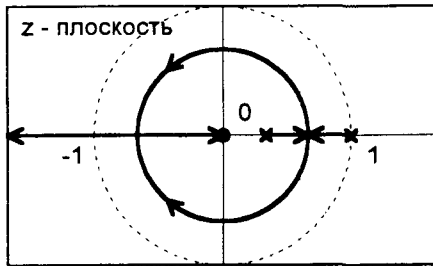


РИС. 78

в котором параметр  $k_0$  входит линейно, что позволяет построить траекторию корней при изменении этого параметра.

Начальное множество корней годографа  $\{1, e^{-h}\}$  конечное  $\{0\}$ . У системы два полюса и один нуль, поэтому один из корней годографа уйдет в бесконечность по действительной оси. При некоторых значениях параметра в системе может быть дважды пара кратных корней: положительных и отрицательных. Корневой годограф системы изображен на рис. 78.

Аналитический аппарат исследования качества процессов управления оказывается малоэффективным при изучении поведения дискретной системы в интервалах между моментами квантования, при исследовании так называемых скрытых колебаний в системе, при анализе зависимости свойств системы от периода квантования. Для решения таких проблем эффективным средством оказывается моделирование с использованием специализированных интерактивных моделирующих программных пакетов (16.5).

## 8.5. УПРАЖНЕНИЯ

1. Являются ли управляемыми и наблюдаемыми данные системы:

$$а) \ x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} u(k); \quad y(k) = (1, 2)x(k);$$

$$б) \ x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k); \quad y(k) = (1, 1, 2)x(k)?$$

2. Найти управляющую последовательность, переводящую систему

$$\Sigma: \ M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

из начального состояния  $(2, 1, -1)^T$  в начало координат за три шага.

3. Будут ли асимптотически устойчивыми системы, заданные характеристическими полиномами:

а)  $z^2 - z + 0,16$ ;

б)  $z^3 - 0,216$ ;

в)  $z^3 + 0,9z^2 + 0,28z - 0,49$ ?

Ответ получить непосредственным вычислением характеристических корней.

4. Использовать критерии Рауса-Гурвица и Джюри для определения устойчивости систем, имеющих характеристические полиномы, приведенные в 3.

5. Найти значение коэффициента передачи  $k_0$ , при котором дискретная система с заданной передаточной функцией  $W(z)$  окажется асимптотически устойчивой:

а)  $k_0/(z(z-0,8)(z-0,4))$ ;

б)  $k_0(z-0,25)/(z(z-0,3)(z-0,5))$ .

6. Построить годограф Найквиста для дискретной системы с передаточной функцией разомкнутого тракта:

$$G(z) = 1/(z-0,4).$$

7. Построить переходный процесс и оценить качество управления для системы

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ -1 & 0,6 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,9 \end{pmatrix} u(k); \quad y(k) = (1, 2)x(k).$$

Найти  $y(3)$  для этой системы, если  $y(1) = 3$ ;  $u(1) = 4$ ;  $y(2) = 8$ ;  $u(2) = -2$ .

8. Найти значение установившейся ошибки для системы с передаточной функцией прямого тракта



$$G(z) = (z - 0,4)/(z - 0,7)(z - 1),$$

если входной сигнал: а) единичный ступенчатый; б) единичный линейный.

9. Построить корневой годограф системы, которая задана дискретной передаточной функцией разомкнутой части:

а)  $k_0(z + 0,8)/((z - 1)(z - 0,5));$

б)  $k_0(z + 1)/(z - 1)^2.$

Построить корневой годограф дискретной системы с характеристическим полиномом:

$$0,81z^2 + (200h^2 + 70h - 2)z + (200h^2 - 70h + 2), \quad h = \text{var.}$$

10. Выполнить моделирование процессов в системе:

а) с передаточной функцией разомкнутой части

$$G(z) = (z + 1)/(z^2 + 0,2z + 1),$$

подобрать период квантования, при котором в системе возникают скрытые колебания;

б) с передаточной функцией разомкнутой части

$$G(z) = 0,03(z + 0,867)/(z^2 - 1,654z + 0,683).$$

Замкните систему с использованием управления:

а)  $u(k) = k_0(u_0 - y(k));$

б)  $u(k) = k_0(u_0 - y(k)) - k_1u(k - 1).$

Исследуйте поведение процессов в системе между моментами квантования в зависимости от  $k_0$ . Подберите  $k_0, k_1$  так, чтобы процесс установился на уровне ступенчатого задания  $u_0$  за два или три шага.

## 9 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

*Анализ устойчивости в малом — Устойчивость в большом и в целом — Абсолютная устойчивость нелинейных систем управления — Периодические процессы в нелинейных системах — Анализ качества процессов управления — Упражнения.*

Движения нелинейных систем гораздо более сложные и многообразные, чем движения линейных систем. Фазовые портреты нелинейных систем в общем случае неоднородны, могут иметь более чем одну точку покоя, изолированные замкнутые кривые и различные особенности, поэтому анализ устойчивости нелинейных систем оказывается более сложным, чем анализ устойчивости линейных систем.

Понятия *устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову*, введенные в 5.3, позволяют анализировать движения системы в окрестности положения покоя. Эти определения характеризуют свойство *устойчивости в малом* нелинейной системы, однако они не позволяют определять границы области устойчивости. Поэтому вводятся понятия *устойчивости в большом и устойчивости в целом*.

Для анализа устойчивости отдельных траекторий используется понятие *равномерной асимптотической устойчивости* движения, а для анализа замкнутых траекторий — понятие *орбитальной асимптотической устойчивости*.

Задачи об устойчивости замкнутых нелинейных систем управления при любых возмущениях и любых нелинейностях решаются с использованием понятия *абсолютной устойчивости*.

## 9.1. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ В МАЛОМ

Анализ устойчивости нелинейной системы по уравнениям первого приближения являлся первым и основным инженерным методом исследования, однако этот метод иногда допускает ошибочные заключения об устойчивости.

### Примеры

1. На рис. 79 приведен фазовый портрет нелинейной системы канонической структуры, для которой  $\Phi(\varepsilon) = \text{sat } \varepsilon$ ,  $W(s) = 5/((s - 1)(s + 3,5))$ . Система асимптотически устойчива по первому приближению в окрестности начала координат, но, очевидно, в целом не является устойчивой.

2. Движение нелинейной системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned}x_1' &= -\alpha x_2 + \alpha x_1(x_1^2 + x_2^2)^{0,5}; \\x_2' &= \alpha x_1 + \alpha x_2(x_1^2 + x_2^2)^{0,5},\end{aligned}$$

где  $\alpha$  — параметр системы.

Уравнения первого приближения этой системы имеют вид

$$x_1' = -\alpha x_2; \quad x_2' = \alpha x_1.$$

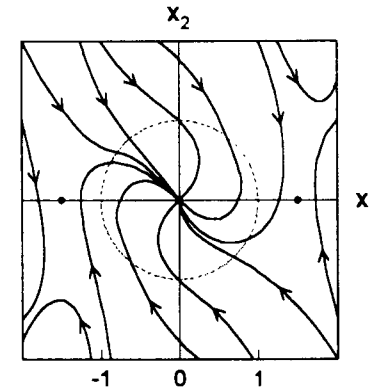
Если судить по первому приближению, то фазовый портрет системы — центр. Однако реальный фазовый портрет совсем не таков!

В самом деле, уравнение движения нелинейной системы в полярных координатах приводится к виду  $r' = \alpha r^2$ ,  $r(0) = r_0$ , поэтому его решение  $r = r_0/(1 - \alpha t)$ .

Пусть параметр  $\alpha$  — положителен, тогда фазовая точка с ростом времени бесконечно удаляется от начала координат; если параметр — отрицателен, то фазовая точка с ростом времени бесконечно приближается к началу координат. В первом случае движение неустойчиво, во втором — асимптотически устойчиво.

А.М. Ляпунов первым описал условия, когда анализ устойчивости по первому приближению дает правильный ответ.

РИС. 79



Рассмотрим автономную нелинейную систему  $x' = F(x)$  и ее точку покоя  $x^*$ .

Пусть

$$x(t) = x^* + \delta x(t),$$

где  $\delta x(t)$  — возмущение по  $x^*$ .

Найдем уравнение для возмущенного движения.

Ясно, что

$$x' = (x^* + \delta x)' = F(x^* + \delta x);$$

разложим  $F(x^* + \delta x)$  в окрестности точки покоя в ряд Тейлора:

$$F(x^* + \delta x) = F(x^*) + J(x^*)\delta x + o(\delta x),$$

где  $J(x^*)$  — матрица Якоби функции  $F(x)$  в точке  $x^*$ .

Таким образом, уравнение возмущенного движения — первое приближение нелинейного уравнения, представляется в виде линейного дифференциального уравнения

$$(\delta x)' = J(x^*)\delta x.$$

### Теорема (А.М. Ляпунов, 1892)

*Если вещественные части всех собственных чисел матрицы  $J(x^*)$  первого приближения отрицательны, то положение равновесия  $x^*$  асимптотически устойчиво. Если среди собственных чисел матрицы  $J(x^*)$  первого приближения найдется хотя бы одно с положительной вещественной частью, то положение равновесия  $x^*$  неустойчиво.*

Если среди собственных чисел матрицы  $J(x^*)$  первого приближения найдется хотя бы одно с нулевой вещественной частью, а остальные — с отрицательной, то устойчивость положения равновесия  $x^*$  по первому приближению даже в малом установить нельзя.

### Примеры

1. Нелинейная система канонической структуры, для которой

$$\Phi(\varepsilon) = \text{sat } \varepsilon; \quad W(s) = 5/((s-1)(s+3,5)),$$

имеет три особые точки (рис. 79):  $(0, 0)^T$ ;  $(\pm 10/7, 0)^T$ .

Уравнение невозмущенного движения системы в координатах состояния имеет вид

$$x'_1 = x_2; \quad x'_2 = 3,5x_1 - 2,5x_2 - 5\text{sat } x_1.$$

В окрестности  $x^* = (0, 0)^T$  уравнение первого приближения имеет вид

$$x'_1 = x_2; \quad x'_2 = -1,5x_1 - 2,5x_2.$$

Характеристическое уравнение этой системы  $\lambda^2 + 2,5\lambda + 1,5 = 0$ , собственные числа — действительные отрицательные:  $-1,0$ ;  $-1,5$ . Поэтому положение равновесия асимптотически устойчиво.

В окрестности  $x^* = (\pm 10/7, 0)^T$  уравнение первого приближения имеет вид

$$x'_1 = x_2; \quad x'_2 = 3,5x_1 - 2,5x_2.$$

Характеристическое уравнение этой системы  $\lambda^2 + 2,5\lambda - 3,5 = 0$ , собственные числа — действительные и разного знака. Поэтому положение равновесия неустойчиво.

2. Нелинейная система

$$x'_1 = -\alpha x_2 + \alpha x_1(x_1^2 + x_2^2)^{0,5};$$

$$x'_2 = \alpha x_1 + \alpha x_2(x_1^2 + x_2^2)^{0,5}$$

имеет единственную точку покоя — начало координат. Матрица Якоби в этой точке имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

поэтому корни характеристического уравнения первого приближения  $\lambda^2 + \alpha^2 = 0$  оказываются мнимыми. Судить об устойчивости или неустойчивости особой точки по первому приближению нельзя.

## 9.2. УСТОЙЧИВОСТЬ В БОЛЬШОМ И В ЦЕЛОМ

**Определение.** Положение равновесия  $x^*$  системы *асимптотически устойчиво в большом по отношению к области R*, если  $x^*$  устойчиво и всякая траектория, которая начинается в R, стремится к  $x^*$  с ростом времени. Если при этом R совпадает со всем фазовым пространством, то имеет место *асимптотическая устойчивость в целом*.

Фундаментальным методом исследования устойчивости движения является *второй метод Ляпунова*, основное достоинство которого состоит в том, что он позволяет судить об устойчивости, не отыскивая при этом точного движения нелинейной системы. В основе метода Ляпунова лежит аналитическое обобщение физического факта: при движении к положению равновесия полная энергия устойчивой автономной системы уменьшается, достигая минимума в точке покоя.

**Определение.** Скалярную функцию векторного аргумента  $V(x)$ , непрерывную вместе со своими первыми частными производными в некоторой области R, содержащей начало координат, называют *функцией Ляпунова системы*  $x' = F(x)$ , если  $V(x)$  в области R является положительно определенной и ее полная производная по времени в силу этой системы  $V'(x)$  является в области R отрицательно полуопределенной.

**Полная производная по времени функции  $V(x)$**  в силу системы  $x' = F(x)$  находится по формуле

$$V'(x) = (\text{grad } V(x))^T x' = (\text{grad } V(x))^T F(x).$$

Полная производная по времени функции  $V(x)$  в силу системы  $x' = F(x)$  позволяет проследить за движением фазовой точки, поскольку представляет собой проекцию вектора фазовой скорости на направление градиента функции  $V(x)$ . Пусть, например, в данный момент времени фазовая точка находится на поверхности функции  $V(x) = c$  и  $V'(x) < 0$ . Из этого следует, что функция  $V(x)$  убывает, значит, фазовая точка переходит во внутрь поверхности  $V(x) = c$ . С другой стороны, так как  $V'(x) < 0$ , скалярное произведение вектора фазовой скорости и градиента отрицательно, проекция вектора фазовой скорости направлена в сторону, противоположную градиенту. Но ведь вектор градиента совпадает с внешней нормалью к поверхности  $V(x) = c$ , значит, фазовая точка будет двигаться во внутрь этой поверхности.

**Теоремы (А.М. Ляпунов, 1892)**

**Об устойчивости**

*Если в некоторой ограниченной области  $R$ , включающей начало координат, для системы  $x' = F(x)$ ,  $F(0) = 0$  существует ограниченная функция Ляпунова этой системы, то начало координат устойчиво в большом относительно области  $R$ .*

**Об асимптотической устойчивости**

*Если в условиях первой теоремы, кроме того,  $V'(x)$  отрицательно определенная, то начало координат асимптотически устойчиво в большом относительно области  $R$ .*

**О неустойчивости**

*Если для системы  $x' = F(x)$  существует в области  $R$  непрерывная со своими частными производными функция  $V_1(x)$ , такая, что  $V_1(0) = 0$ , а ее производная по времени  $V_1'(x)$  — положительно определенная функция вдоль любых траекторий системы, но при этом в любой окрестности начала координат  $V_1(x)$  не является*

*отрицательно полуопределенной, то начало координат системы неустойчиво.*

**Теорема (Е.А. Барбашин, Н.Н. Красовский, 1952)**

**Об устойчивости в целом**

*Если для системы  $x' = F(x)$  во всем фазовом пространстве существует функция Ляпунова  $V_1(x)$ , такая, что  $V_1(x)$  бесконечно растет с удалением от начала координат и ее полная производная по времени в силу системы всюду отрицательно определенная, то начало координат системы асимптотически устойчиво в целом.*

**Примеры**

1. Рассмотрим движение математического маятника в пустоте:

$$x_1' = x_2; \quad x_2' = -\omega^2 \sin x_1.$$

Для анализа устойчивости точки покоя определим функцию  $V(x)$  как функцию, пропорциональную полной энергии маятника:

$$V(x_1, x_2) = 0,5x_2^2 + \omega^2(1 - \cos x_1).$$

Эта функция — непрерывная, непрерывны ее первые частные производные, в области  $R = \{(x_1, x_2): |x_1| < 2\pi\}$  функция  $V(x_1, x_2)$  положительно определенная. Полная производная по времени этой функции в силу системы равна нулю везде в  $R$ :

$$V'(x_1, x_2) = (\omega^2 \sin x_1)x_2 + x_2(-\omega^2 \sin x_1) = 0.$$

Значит,  $V'(x_1, x_2)$  — отрицательно полуопределенная в  $R$ . Следовательно, для модели маятника в  $R$  построена функция Ляпунова, и этим доказана устойчивость точки покоя этой системы.

2. Рассмотрим движение математического маятника в демпфирующей среде:

$$x_1' = x_2; \\ x_2' = -\zeta x_2 - \omega^2 \sin x_1, \quad \zeta > 0.$$

Построим функцию Ляпунова в виде

$$V(x_1, x_2) = 0,5x_2^2 + \omega^2 (1 - \cos x_1).$$

Находим полную производную по времени в силу системы

$$V'(x_1, x_2) = (\omega^2 \sin x_1)x_2 + x_2(-\zeta x_2 - \omega^2 \sin x_1) = -\zeta x_2^2.$$

Эта функция — всюду отрицательно полуопределенная, поскольку  $V'(x_1, x_2)$  принимает отрицательные значения везде, кроме множества точек  $\{(x_1, 0)\}$ , где  $V'(x_1, x_2) = 0$ .

Следовательно, начало координат системы асимптотически устойчиво в большом.

### 3. Для нелинейной системы

$$\begin{aligned} x_1' &= -\alpha x_2 + \alpha x_1(x_1^2 + x_2^2)^{0,5}; \\ x_2' &= \alpha x_1 + \alpha x_2(x_1^2 + x_2^2)^{0,5}; \end{aligned}$$

возьмем положительно определенную функцию  $V(x_1, x_2) = 0,5(x_1^2 + x_2^2)$  и вычислим ее полную производную по времени в силу системы. Имеем

$$\begin{aligned} V'(x_1, x_2) &= x_1(-\alpha x_2 + \alpha x_1(x_1^2 + x_2^2)^{0,5}) + \\ &+ x_2(\alpha x_1 + \alpha x_2(x_1^2 + x_2^2)^{0,5}) = \alpha (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)^{0,5}. \end{aligned}$$

Теперь можно определенно утверждать, что положение покоя  $(0, 0)^T$  при отрицательном  $\alpha$  асимптотически устойчиво, а при  $\alpha$  положительном — неустойчиво. Заметим, что при отрицательном  $\alpha$  выполняются условия не только теоремы Ляпунова, но и теоремы Барбашина—Красовского, следовательно, положение покоя системы асимптотически устойчиво в целом.

4. Исследуем устойчивость системы стабилизации положения космического аппарата на орбите, управляемое движение которого описывается нелинейными уравнениями

$$\begin{aligned} J_1 x_1' - (J_2 - J_3) x_2 x_3 &= -k_1 x_1; \\ J_2 x_2' - (J_3 - J_1) x_3 x_1 &= -k_2 x_2; \\ J_3 x_3' - (J_1 - J_2) x_1 x_2 &= -k_3 x_3 \end{aligned}$$

и стабилизация осуществляется путем приложения управляющих моментов, пропорциональных угловым скоростям.

Уравнения движения удобнее записать в матричной форме:

$$\dot{x} = A(x) x,$$

$$\text{где } A(x) = \begin{pmatrix} -k_1/J_1 & J_2 x_3/J_1 & -J_3 x_2/J_1 \\ -J_1 x_3/J_2 & k_2/J_2 & J_3 x_1/J_2 \\ J_1 x_2/J_3 & -J_2 x_1/J_3 & -k_3/J_3 \end{pmatrix}.$$

Положение покоя в этой системе — начало координат. Выберем функцию Ляпунова в виде положительно определенной квадратичной формы:

$$V(x) = x^T Q x; \quad x = (x_1, x_2, x_3)^T; \quad Q = \text{diag}(J_1, J_2, J_3).$$

Вычислим производную по времени этой функции в силу системы

$$\begin{aligned} V'(x) &= (x')^T Q x + x^T Q x' = x^T A^T(x) Q x + x^T Q A(x) x = \\ &= x^T (A^T(x) Q + Q A(x)) x. \end{aligned}$$

Обозначим  $(A^T(x) Q + Q A(x)) = -P$ .

Ясно, что функция  $V'(x) = -x^T P x$  — вновь квадратичная форма, у которой матрица  $P = \text{diag}(2k_1 J_1, 2k_2 J_2, 2k_3 J_3)$  — очевидно, положительно определенная. Значит, условия теоремы Ляпунова выполняются и поэтому система стабилизации имеет асимптотически устойчивое положение равновесия. Кроме того, с неограниченным удалением  $x$  от начала координат бесконечно растут значения функции  $V(x)$ , поэтому на основании теоремы Барбашина-Красовского система асимптотически устойчива в целом при любом возмущении.

## 9.3. АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается класс нелинейных систем управления канонической структуры, у которых  $u(t) \equiv 0$ , линейная часть имеет передаточную функцию  $W(s)$ , а нелинейное звено имеет харак-

теристика  $\Phi(\varepsilon)$ , которая нечетна и заключена в угле между прямыми  $k_1\varepsilon$ ,  $k_2\varepsilon$ . Последнее условие означает, что  $\Phi(0) = 0$ ,  $0 \leq k_1 \leq \Phi(\varepsilon)/\varepsilon \leq k_2$ .

Задача анализа состоит в том, чтобы найти необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в целом положения равновесия системы независимо от вида характеристики  $\Phi(\varepsilon)$  нелинейности. Эту задачу, сформулированную в 1944 г. А.И. Лурье и В.И. Постниковым, решали на основе прямого метода Ляпунова М.А. Айзерман, А.М. Лётов, Ж. Ла-Салль, С. Лефшец.

Другой путь решения проблемы абсолютной устойчивости на основе частотных методов был предложен в 1959 г. румынским математиком В.-М. Поповым. Им были сформулированы критерии абсолютной устойчивости для большого класса систем. Развитие метода В.-М. Попова для дискретных систем управления выполнили Я.З. Цыпкин, Б.Н. Наумов, Э. Джурри.

**Задача Лурье** может быть сформулирована несколько иначе: отыскать все множество нелинейных характеристик системы управления, для которых функция  $V(x)$  некоторого частного вида является функцией Ляпунова этой системы.

Довольно часто функцию  $V(x)$  представляют в виде суммы положительно определенной квадратичной формы от координат состояния и интеграла от нелинейной характеристики.

### Примеры

1. Пусть в системе  $W(s) = 1/s^2$  и нелинейность с произвольной характеристикой  $\Phi(\varepsilon)$ , тогда уравнения состояния системы принимают вид

$$x'_1 = x_2; \quad x'_2 = -\Phi(x_1).$$

Построим функцию Ляпунова по схеме Лурье:

$$V(x_1, x_2) = 0,5x_2^2 + \int_0^{x_1} \Phi(x_1) dx_1.$$

Вычислим полную производную по времени в силу системы этой функции:

$$V'(x_1, x_2) = \Phi(x_1)x_2 - x_2\Phi(x_1) = 0.$$

Условия теоремы Ляпунова выполнены, значит, система устойчива в целом для любой нелинейности. Система абсолютно устойчива.

2. Пусть в системе  $W(s) = 1/(s(s + \alpha))$  и нелинейность с произвольной характеристикой  $\Phi(\varepsilon)$ , тогда уравнения состояния системы принимают вид

$$x'_1 = x_2; \quad x'_2 = -\alpha x_2 - \Phi(x_1).$$

Функцию Ляпунова возьмем той же, что и в примере 1. Найдем ее полную производную по времени в силу системы

$$V'(x_1, x_2) = \Phi(x_1)x_2 - x_2(\alpha x_2 + \Phi(x_1)) = -\alpha x_2^2.$$

Для абсолютной асимптотической устойчивости системы достаточно, чтобы  $\alpha > 0$ .

Класс систем, для которых решается задача Лурье, представляется двумя группами: системы прямого регулирования (см. рис. 42) и системы непрямого регулирования, в которых нелинейность и исполнительный орган охвачены обратной связью, например, как это показано на рис. 80.

После введения координат состояния  $(x, \varepsilon)$  модель такой системы непрямого регулирования описывается уравнениями (S. Lefschetz):

$$x' = Ax + Bz; \quad z = \Phi(\varepsilon); \quad \varepsilon' = y - \beta z; \quad y = Cx.$$

Найдем условия абсолютной асимптотической устойчивости, используя метод Лурье. Введем функцию Ляпунова:

$$V(x, \varepsilon) = x^T Qx + \int_0^\varepsilon \Phi(\varepsilon) d\varepsilon,$$

где  $Q$  — произвольная симметрическая, положительно определенная матрица.

Найдем полную производную по времени этой функции в силу системы:

$$\begin{aligned} V'(x, \varepsilon) &= (x')^T Qx + x^T Qx' + \Phi(\varepsilon)\varepsilon' = \\ &= -(x')^T R x - 2\Phi(\varepsilon)G^T x - \beta\Phi^2(\varepsilon), \end{aligned}$$

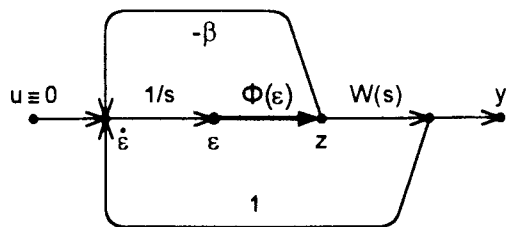


РИС. 80

где обозначено:

$$R = -(A^T Q + QA);$$

$$G = QB + 0,5C.$$

Представим  $V'(x, \varepsilon)$  в квадратичной форме:

$$V'(x, \varepsilon) = (x, \Phi(\varepsilon)) \begin{pmatrix} -R & G & x \\ G & -\beta & \Phi(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

что позволит сформулировать условие отрицательной определенности этой функции, используя критерий Сильвестра.

Система непрямого регулирования (см. рис. 56) будет асимптотически устойчивой при любой нелинейности, если выполняются условия:  $R > 0$ ;  $\beta > G^T R^{-1} G$  и матрица  $R$  будет положительно определенной.

### Пример

Для системы непрямого регулирования, изображенной на рис. 80, линейная часть имеет передаточную функцию:

$$W(s) = (s + 3)/(s^2 + 3s + 2).$$

Введем координаты состояния так, что

$$x'_1 = -2x_1 - \Phi(\varepsilon); \quad x'_2 = x_2 + 2\Phi(\varepsilon);$$

$$y = x_1 + x_2; \quad \varepsilon' = x_1 + x_2 - \beta\Phi(\varepsilon),$$

поэтому

$$A = \text{diag}(-2, 1); \quad B = (-1, 2)^T; \quad C = (1, 1).$$

Положим, к примеру,

$$R = \text{diag}(2, 4),$$

что позволит найти матрицу  $Q$  функции Ляпунова. Из условия  $R = -(A^T Q + QA)$  находим, что  $Q = \text{diag}(0,5 \quad -2)$ . Теперь можно

определить матрицу  $G = (0, -3,5)^T$  и затем условие абсолютной устойчивости:  $\beta > 3,0625$ .

Частотные методы анализа нелинейных систем управления, предложенные и развитые В.-М. Поповым, оказались эффективным средством исследования абсолютной устойчивости для широкого класса нелинейных систем любого порядка непрерывных и дискретных, с запаздыванием и без него, с сосредоточенными и с распределенными параметрами.

Рассмотрим нелинейную систему канонической структуры (см. рис. 42), у которой отсутствует входное воздействие, известна передаточная функция линейной части  $W(s)$  и характеристика нелинейности  $\Phi(\varepsilon)$ .

**Определение.** Система называется **абсолютно устойчивой в секторе  $[k_1, k_2]$** , если ее положение равновесия асимптотически устойчиво при любых начальных условиях и при любом выборе функции  $\Phi(\varepsilon)$ , удовлетворяющей условиям:

$$\Phi(0) = 0; \quad 0 \leq k_1 \leq \Phi(\varepsilon)/\varepsilon \leq k_2.$$

В основе частотных критериев устойчивости В.-М. Попова лежит доказанная им теорема, в которой формулируются достаточные условия и которая позволяет выводить суждения об абсолютной устойчивости нелинейной системы по частотной характеристике ее линейной части.

### Теорема (В.-М. Попов, 1959)

*Для того чтобы система была абсолютно устойчивой в секторе  $[0, k]$ , достаточно, чтобы существовало такое действительное число  $q$ , при котором для всех значений  $\omega \geq 0$  выполнялось условие*

$$\text{Re}[(1 + jq\omega)W(j\omega)] + 1/k > 0.$$

Частотный критерий абсолютной устойчивости является геометрической интерпретацией основной теоремы. Введем в рассмотрение, следуя Попову, помимо основной частотной характеристики  $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ , модифицированную частотную

характеристику линейной части  $W^*(j\omega) = U^*(\omega) + jV^*(\omega)$  по правилу:  $U^*(\omega) = U(\omega)$ ;  $V^* = \omega V(\omega)$ .

Годограф модифицированной частотной характеристики  $W^*(j\omega)$  и годограф основной частотной характеристики  $W(j\omega)$  пересекаются в точках, где  $\omega = 0$ ,  $\omega = 1$ , а также на действительной оси.

В терминах модифицированной частотной характеристики основное условие теоремы Попова принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[(1 + jq\omega)(U + jV)] + 1/k &= U - q\omega V + 1/k = \\ &= U^* - qV^* + 1/k > 0. \end{aligned}$$

Уравнение  $U^* - qV^* + 1/k = 0$  определяет на комплексной плоскости  $(U^*, jV^*)$  критериальную прямую, проходящую через точку  $-1/k$  на действительной оси с угловым наклоном  $1/q$ . Эту прямую называют *прямой Попова*.

#### Критерий (линейный)

**Состояние равновесия нелинейной системы с асимптотически устойчивой линейной частью будет абсолютно устойчивым в  $[0, k]$ , если модифицированный годограф линейной части не пересекает прямую Попова.**

Для нелинейной системы с нейтральной и даже неустойчивой линейной частью применение условий Попова возможно после преобразования сдвига полюсов влево, например, по схеме, изображенной на рис. 81. В новой структуре характеристика нелинейности и передаточная функция линейной части изменились:

$$\tilde{\Phi}(\varepsilon) = \Phi(\varepsilon) - r\varepsilon; \quad \tilde{W}(s) = W(s)/(1 + rW(s)).$$

Применим условия теоремы Попова к новой структуре:

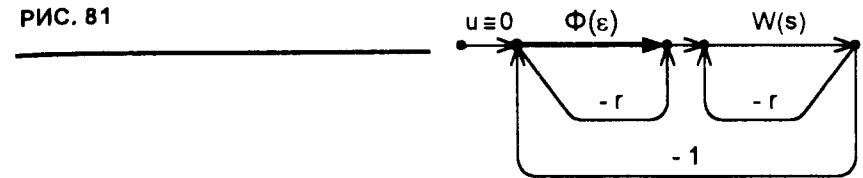
$$0 \leq \tilde{\Phi}(\varepsilon)/\varepsilon \leq (k - r);$$

$$\operatorname{Re}[(1 + jq\omega)\tilde{W}(j\omega)] + 1/(k - r) > 0.$$

Раскроем выражение

$$\tilde{W} = (U + jV)/(1 + rU + jrV) = ((U(1 + rU) + rV^2) + j((1 + rU)V - rUV))/((1 + rU)^2 + (rV)^2)$$

РИС. 81



и подставим его в условие Попова. После алгебраических преобразований получим новое выражение для условия абсолютной устойчивости:

$$U^2 + (1/r + 1/k)U + V^2 - q(1/r - 1/k)\omega V + 1/rk > 0.$$

Это неравенство делит комплексную плоскость  $(U^*, jV^*)$  на две области с критериальной границей — параболой, которая пересекает действительную ось в точках  $-1/r$ ,  $-1/k$  и имеет наклон касательных в этих точках соответственно  $1/q$ ,  $-1/q$ . Эту параболу называют *параболой Попова*.

#### Критерий (параболический)

**Состояние равновесия нелинейной системы с нейтральной и неустойчивой линейной частью будет абсолютно устойчивым в  $[r, k]$ , если модифицированный годограф линейной части не пересекает параболу Попова.**

Заметим, что данный критерий справедлив при числе нулевых полюсов не более двух и правых полюсов не более одного. Предложенный В.-М. Поповым более мощный *круговой критерий* свободен от этих ограничений, кроме того, он формулируется в терминах основной частотной характеристики  $W(j\omega)$  линейной части системы. Круговой критерий является геометрической интерпретацией обобщенной теоремы об абсолютной устойчивости нелинейных систем.

#### Теорема (В.-М. Попов, 1962)

*Рассматривается система канонической структуры, у которой линейная часть, охваченная отрицательной обратной связью с коэффициентом  $r$ , устойчива. Для того чтобы исходная система была абсолютно устойчивой в секторе  $[r, k]$ , достаточно существование та-*



кого действительного числа  $q$ , что для всех значений  $\omega \geq 0$  выполняется условие

$$|W(j\omega) + (k + r - jq\omega(k - r))/2kr|^2 - (k - r)/2kr^2 (1 + q^2 \omega^2) > 0.$$

Геометрически обобщенное условие Попова делит для каждого значения  $\omega$  комплексную плоскость на две области: внутренность и внешность критериального круга с центром в точке

$$-0,5(1/r + 1/k) + 0,5jq\omega(1/r - 1/k),$$

который пересекает действительную ось в точках  $-1/r$  и  $-1/k$ . Границу этого круга называют  $\omega$ -*окружностью Попова*.

### Критерий (обобщенный)

*Состояние равновесия нелинейной системы будет абсолютно устойчивым в  $[r, k]$ , если для каждой частоты  $\omega \geq 0$  вектор  $W(j\omega)$  частотного годографа линейной части находится вне соответствующей  $\omega$ -окружности Попова.*

Заметим, что если  $r$  исчезающе мал, то результаты анализа по обобщенному критерию практически совпадают с результатами по линейному критерию. Критериальные окружности имеют центры, которые смещаются вверх с увеличением произведения  $q\omega$ , но все окружности проходят через точки  $-1/r$  и  $-1/k$  на действительной оси. При  $q = 0$  критериальная окружность для всех  $\omega$  симметрична относительно действительной оси.

Найденный допустимый раствор сектора, в котором может располагаться нелинейная характеристика, называют *сектором Попова*. Заметим, что если нелинейность  $\Phi(\varepsilon)$  линеаризована, то максимальное значение коэффициента усиления такой "линейной" системы определяет так называемый *гурвицев угол*. Для истинно линейной системы гурвицев угол соответствует предельному коэффициенту усиления.

Сектор Попова не превосходит гурвицев угол! В самом деле, если сектор Попова определяется точкой пересечения прямой Попова с действительной осью, то гурвицев угол — точкой пересечения годографа с действительной осью. Оба угла совпадают только тогда, когда прямая Попова и годограф пересекают действительную ось в одной точке.

Дальнейшим развитием частотных методов анализа абсолютной устойчивости нелинейных систем явился круговой критерий, предложенный в 1964 г. Я.З. Цыпкиным и Б.Н. Наумовым для анализа абсолютной устойчивости вынужденных процессов в нелинейных системах со стационарной и нестационарной нелинейностью.

Круговой критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейной системе подобен обобщенному частотному критерию Найквиста для линейных систем с той лишь разницей, что в качестве индикатора выступает не точка  $(-1, j0)$ , а круг Попова с центром на действительной оси в точке  $-0,5(1/r + 1/k)$ , который пересекает действительную ось в точках  $-1/r$  и  $-1/k$ .

### Критерий

*Вынужденные процессы в нелинейной системе будут абсолютно устойчивыми, если значения производной характеристики нелинейного элемента  $d\Phi(\varepsilon)/d\varepsilon$  лежат в секторе  $[r, k]$  и годограф частотной характеристики  $W(j\omega)$  линейной части системы, не пересекая окружности Попова, охватывает ее в положительном направлении  $m/2$  раз, где  $m$  — число правых полюсов  $W(s)$ .*

### Примеры

1. Пусть нелинейная система имеет линейную часть второго порядка. Частотный годограф линейной части — выпуклая кривая, проходящая через начало координат, таков и модифицированный годограф, поэтому прямую Попова можно провести через начало координат. А это значит, что положение равновесия этой нелинейной системы асимптотически устойчиво с любой однозначной характеристикой нелинейного элемента.

2. Нелинейная система имеет асимптотически устойчивую линейную часть с передаточной функцией:

$$W(s) = 10(0,05s + 1)/((s + 1)(0,01s + 1)(0,01s^2 + 0,02s + 1)).$$

Определим условия абсолютной устойчивости этой системы, для чего вычислим основную и модифицированную частотные характеристики линейной части системы. На рис. 82 изображены годографы вычисленных характеристик и графически

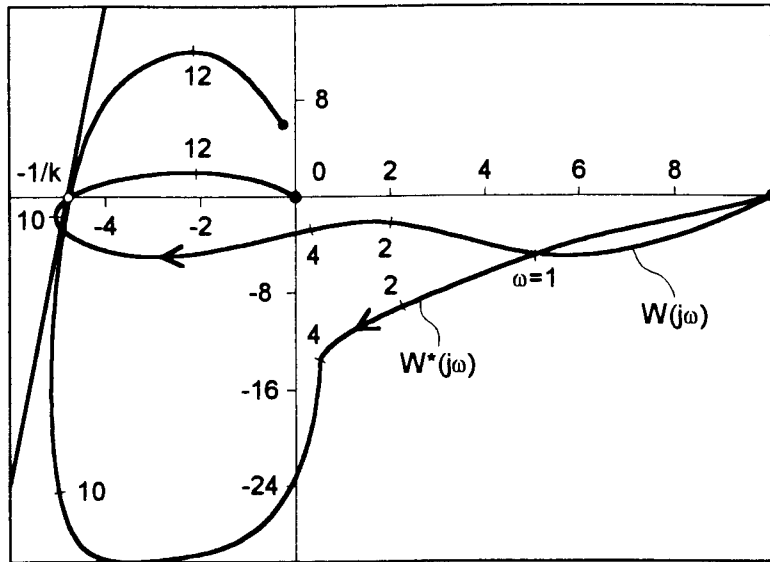


РИС. 82

построена прямая Попова, которая проходит через точку  $-4,7$  на действительной оси. Следовательно, нелинейная система будет абсолютно устойчива в секторе  $[0, 0,213]$ .

Заметим, что в данном случае гурвицев угол и сектор Попова равны, годографы и прямая Попова пересекаются в одной точке на действительной оси. Области устойчивости нелинейной системы и соответствующей линейной системы совпадают.

3. Пусть в нелинейной системе канонической структуры

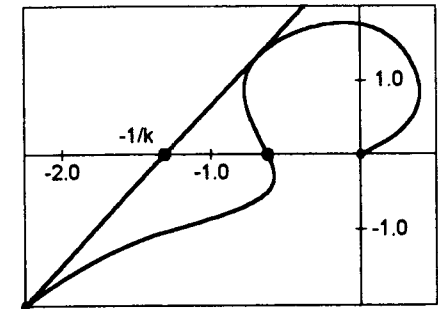
$$W(s) = 20/(s(s+1)(s^2+s+10)).$$

Модифицированная частотная характеристика линейной части может быть вычислена по выражению

$$W^*(j\omega) = 20((\omega^2 - 11) + j(2\omega^2 - 10))/((\omega^2(\omega^2 - 11))^2 + (2\omega^2 - 10)^2).$$

На рис. 83 представлены годограф модифицированной характеристики и прямая Попова. Определена величина  $-1/k$ , равная  $-1,3$ . Следовательно, положение покоя нелинейной сис-

РИС. 83



темы будет абсолютно устойчиво для любой нелинейной характеристики, располагающейся в секторе  $[0, 0,76]$ . Годограф пересекает действительную ось в точке  $-0,65$ , поэтому гурвицев угол составляет  $[0, 1,54]$ , что, очевидно, больше сектора Попова. Запас устойчивости нелинейной системы меньше, чем линейной.

4. Рассмотрим нелинейную систему с неустойчивой линейной частью:

$$W(s) = 1/((s-1)(s+2)(s+5)).$$

Для анализа абсолютной устойчивости можно применить параболический или обобщенный критерий. Найдем величину  $g$ -коэффициента обратной связи для перемещения правого полюса влево. Характеристическое уравнение замкнутой линейной части имеет вид  $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda(g-6) = 0$ . Матрица Гурвица равна

$$G = \begin{pmatrix} 6 & g-10 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & g-10 \end{pmatrix},$$

поэтому замкнутая линейная часть будет асимптотически устойчивой, если  $10 < g < 28$ .

Частотный годограф замкнутой линейной части задается выражением

$$W(j\omega) = ((10 - 6\omega^2) + j\omega(\omega^2 - 3))/((\omega^2(\omega^2 - 3))^2 + (10 - 6\omega^2)^2).$$

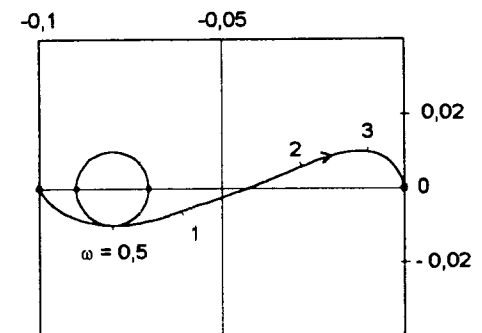


РИС. 84

На рис. 84 изображены годограф  $W(j\omega)$  и круг Попова, по которому определены значения  $1/g = 0,92$  и  $1/k = 0,07$ . Величина сектора Попова для этой системы оказывается равной [10,8 14,3].

## 9.4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрим нелинейную систему управления канонической структуры и процессы в ней. Составим уравнение процессов, происходящих в этой системе. Пусть  $z(t)$  — выходной сигнал нелинейного элемента,  $Z(s) = \mathcal{L}\{\Phi(\varepsilon(t))\}$  — его преобразование по Лапласу, тогда искомые уравнения систем в преобразованном виде примут вид

$$Y(s) = W(s)Z(s); \quad E(s) = U(s) - Y(s).$$

Запишем эти уравнения во временной области:

$$y(t) = \int_0^t k(t - \tau)\Phi(u(\tau) - y(\tau))d\tau;$$

$$\varepsilon(t) = u(t) - \int_0^t k(t - \tau)\Phi(\varepsilon(t - \tau))d\tau,$$

где  $k(t)$  — импульсная характеристика линейной части системы.

Полученные уравнения позволяют описать динамику вынужденных и свободных процессов, возмущенного и невозмущенного движения нелинейной системы. Так, например, для описания вынужденного процесса предполагаем, что на систему воздействует достаточно давно входной возмущающий сигнал  $u^*(t)$ , поэтому в настоящий момент времени  $t$  все переходные процессы закончились. В этом случае уравнения вынужденного процесса принимают вид

$$\varepsilon^a(t) = u^*(t) - \int_0^\infty k(\tau)\Phi(\varepsilon^a(t - \tau))d\tau.$$

В нелинейных системах возможны периодические движения, которые устанавливаются и поддерживаются в системе за

счет сил, зависящих от состояния системы, причем амплитуда этих колебаний определяется не только начальными условиями, но и свойствами самой системы. Такие периодические движения называют *автоколебаниями*. Автоколебания возникают в системах, которые не являются абсолютно устойчивыми.

Для описания автономных движений нелинейной системы исключим из уравнения вынужденных процессов внешнее возмущение:

$$\varepsilon^a(t) = -\int_0^\infty k(\tau)\Phi(\varepsilon^a(t - \tau))d\tau.$$

Полученное уравнение определяет не только автономные движения, но и стационарные состояния системы. Действительно, если положить  $\varepsilon^a(t) = \varepsilon^*$ , то

$$\varepsilon^* = -\Phi(\varepsilon^*) \int_0^\infty k(t)dt = -\Phi(\varepsilon^*)W(0).$$

Откуда получаем соотношение для определения точек покоя нелинейной системы:

$$\Phi(\varepsilon^*) = -\varepsilon^*/W(0).$$

На рис. 85 приведена иллюстрация этого соотношения; для случая однозначной нелинейности и отрицательной обратной связи  $W(0) > 0$  нелинейная система имеет одну точку покоя, если же обратная связь положительная  $W(0) < 0$ , то и при однозначной нелинейности в системе несколько точек покоя.

Уравнение автономных движений описывает и автоколебания в системе, но чтобы найти эти специфические движения нелинейной системы, необходимо решить нелинейное интегральное уравнение:

$$\varepsilon^a(t) = -\int_0^\infty k(\tau)\Phi(\varepsilon^a(t - \tau))d\tau,$$

однако решить его можно лишь приближенными вычислительными методами, например с использованием метода гармонической линеаризации нелинейности.

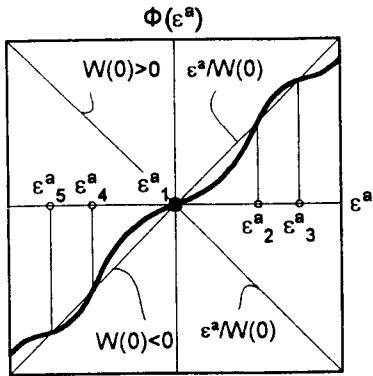


РИС. 85

Будем искать приближенное решение этого уравнения в гармонической форме  $\varepsilon^a(t) = A \sin \omega t$ . Пусть нелинейный элемент системы гармонически линеаризован и  $N(A)$  — его описывающая функция:  $z(t) = N(A)\varepsilon^a(t)$ . Воспользуемся комплексной формой

записи гармонических сигналов, подставим их в интегральное уравнение и получим уравнение автоколебаний:

$$Ae^{j\omega t} = -AN(A) \int_0^{\infty} k(\tau)e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = -AN(A)e^{j\omega t} \int_0^{\infty} k(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

В последнем выражении интеграл — преобразование Лапласа от импульсной характеристики линейной части, иначе говоря, является частотной характеристикой линейной части  $W(j\omega)$ , поэтому после надлежащих преобразований получаем соотношение

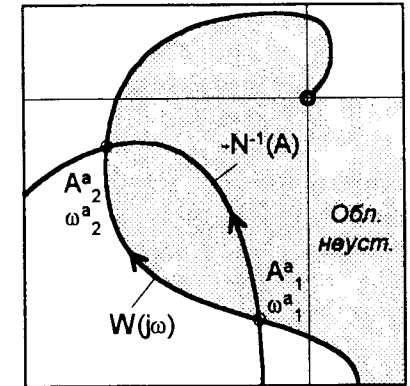
$$N(A)W(j\omega) = -1,$$

которое определяет **условие возникновения** автоколебаний. Это соотношение, выведенное **Л.С. Гольдфарбом**, отражает условия гармонического баланса — баланса амплитуд и баланса фаз для поддержания периодического процесса в системе.

Основное соотношение Гольдфарба может быть получено иначе, с использованием линейной теории.

Действительно, гармонические колебания при отсутствии внешнего воздействия возможны только на границе устойчивости системы. Воспользуемся частотным критерием Найквиста, чтобы определить условия, при которых система, содержащая линеаризованную нелинейность и линейную часть, оказалась на границе устойчивости. Разомкнутая часть системы имеет частотную характеристику, равную  $N(A)W(j\omega)$ . Согласно частотному критерию Найквиста, система оказывается на границе устойчиво-

РИС. 86



сти, если годограф ее разомкнутой части проходит через точку  $-1$  на действительной оси, но это означает, что  $N(A)W(j\omega) = -1$ .

Соотношение Гольдфарба представим в форме  $W(j\omega) = -N^{-1}(A)$ , удобной для графического способа проверки условий возникновения автоколебаний и в положительном случае позволяющей определять величину амплитуды и частоты автоколебаний. Автоколебания будут иметь место в нелинейной системе, если годограф частотной характеристики  $W(j\omega)$  пересекается с отрицательным инверсным годографом  $-N^{-1}(A)$  гармонически линеаризованного нелинейного элемента. В каждой точке пересечения (рис. 86) величина частоты автоколебаний определяется по параметрической оцифровке частотной характеристики  $W(j\omega)$ , а амплитуды автоколебаний — по параметрической оцифровке характеристики  $-N^{-1}(A)$ .

Автоколебаниям отвечают изолированные замкнутые траектории — **предельные циклы** в фазовом пространстве состояний системы. Предельные циклы как движения системы могут быть устойчивыми, неустойчивыми и полуустойчивыми. В первом случае любые фазовые траектории кольцевой окрестности предельного цикла навиваются на предельный цикл с двух сторон, во втором случае все траектории с двух сторон удаляются от предельного цикла, в третьем случае — траектории с одной стороны навиваются, а с другой — удаляются от предельного цикла.

Оценить устойчивость автоколебаний можно без построения фазового портрета системы, для этого следует воспользоваться методом D-разбиения параметрической области. Будем рассматривать  $-N(A)^{-1} = \mu$  как параметр, влияние которого на устойчивость "линейной системы" исследуется. Тогда уравнение  $\mu = W(j\omega)$  определяет на комплексной плоскости границу D-разбиения. Область устойчивости при разбиении комплексной плоскости годографом  $W(j\omega)$  лежит слева при движении по годографу с изменением частоты от нуля до бесконечности.

Теперь сформулируем правила анализа:

- автоколебания будут устойчивыми, если при движении в сторону возрастания амплитуды  $A$  годограф  $-N(A)^{-1}$  переходит из области неустойчивости в область устойчивости;
- автоколебания будут неустойчивыми, если при движении в сторону возрастания амплитуды  $A$  годограф  $-N(A)^{-1}$  переходит из области устойчивости в область неустойчивости;
- автоколебания будут полуустойчивыми, если годограф  $-N(A)^{-1}$  касается границы D-разбиения.

Покажем справедливость такого качественного анализа.

*Случай неустойчивых автоколебаний.* Пусть по некоторым причинам амплитуда автоколебаний увеличилась и годограф, пересекая границу D-разбиения, попадает в область неустойчивости, значит, амплитуда еще более увеличится. Автоколебания срываются, поскольку внутренняя фазовая траектория удаляется от предельного цикла. Пусть теперь амплитуда автоколебаний уменьшилась и годограф, пересекая границу D-разбиения, попадает из области неустойчивости в область устойчивости, где процессы затухающие, значит, амплитуда еще более уменьшится. Автоколебания вновь срываются, поскольку внешняя фазовая траектория удаляется от предельного цикла.

*Случай устойчивых автоколебаний.* Пусть амплитуда автоколебаний увеличилась и годограф, пересекая границу D-разбиения, попадает в область устойчивости, значит, амплитуда в дальнейшем будет уменьшаться, следовательно, внешняя фазовая траектория приближается к предельному циклу. При уменьшении амплитуды годограф попадает в область неустойчивости, где происходит дальнейшее возрастание амплитуды, что соответствует приближению внутренней фазовой траектории к предельному циклу. Устанавливаются устойчивые автоколебания.

Аналогично можно пояснить случай полуустойчивых автоколебаний.

## Примеры

1. Нелинейный элемент системы имеет характеристику  $\Phi(e) = e^3$ , линейная часть системы — передаточную функцию:

$$W(s) = 1/(s + 1)^3.$$

Комплексный коэффициент гармонической линеаризации для нелинейного элемента, найденный в 4.4, имеет вид  $N(A) = 0,75A^2$ .

Соотношение Гольдфарба  $W(j\omega) = -N^{-1}(A)$  выполняются, очевидно, на действительной оси, поскольку частотный годограф проходит через три квадранта, а отрицательный инверсный годограф  $-N^{-1}(A)$  заполняет всю отрицательную действительную полуось. Условие  $\text{Im}W(j\omega) = 0$  будет иметь место на частоте 1,732. При этом действительная часть точки пересечения оказывается равной  $-0,1247$ , что позволяет найти значение амплитуды входного сигнала:  $-N^{-1}(A) = -1,333/A^2 = -0,1247$ . В замкнутой системе будут иметь место автоколебания с частотой  $\omega^a = 1,732 \text{ с}^{-1}$  и амплитудой  $A^a = 3,27$ .

2. Проверим условия возникновения автоколебаний для системы, в которой линейная часть имеет передаточную функцию:

$$W(s) = 4/(s(0,08s + 1)(0,01s + 1)),$$

а нелинейный элемент имеет характеристику трехпозиционного идеального реле:

$$\Phi(\varepsilon) = 100\text{sgn}(\text{dez}(4\varepsilon)).$$

Произвольный вектор годографа частотной характеристики линейной части системы имеет модуль:

$$A(\omega) = 4/((\omega(1 + 10^{-4}\omega^2))(1 + 64 \cdot 10^{-4}\omega^2))^{0,5}$$

и фазу:

$$\psi(\omega) = -0,5\pi - \text{arctg}0,01\omega - \text{arctg}0,08\omega.$$

Комплексный коэффициент гармонической линеаризации для нелинейного элемента вычисляется по выражению

$$N(A) = 400/(\pi A)(1 - 0,25/A)^{0,5}; \quad A > 0,25,$$

поэтому отрицательный инверсный годограф этой характеристики может быть вычислен по выражению

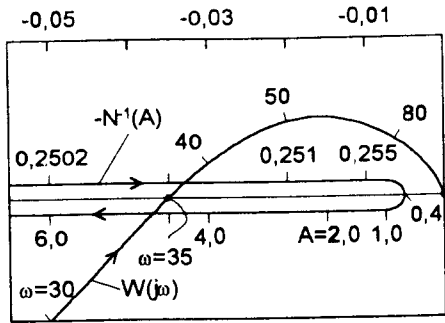


РИС. 87

$$-N(A)^{-1} = \frac{-\pi A^2}{(400(A^2 - 0,0625))^{0,5}}$$

Из графического построения, представленного на рис. 87, следует, что годографы пересекаются в

двух точках, значит, в системе возможны два автоколебательных процесса с частотой  $\omega^a = 35 \text{ с}^{-1}$ : первый — с амплитудой  $A_1^a = 0,2503$ , второй —  $A_2^a = 5,0$ .

Автоколебания с параметрами:  $A_2^a = 0,2503$ ;  $\omega^a = 35 \text{ с}^{-1}$  оказываются неустойчивыми, в системе может установиться устойчивый периодический процесс, близкий к гармоническому,  $y(t) = 5 \sin 3,5t$ .

Используем метод гармонического баланса для определения параметров вынужденного процесса в нелинейной системе [7], которая испытывает внешнее гармоническое воздействие:  $u^*(t) = B \sin(\omega^0 t + \beta)$ . В абсолютно устойчивой нелинейной системе вынужденный процесс может быть также гармоническим с частотой входа или субгармоническим с частотой, в целое число раз меньшей частоты входного сигнала.

Пусть в нелинейной системе имеет место гармонический вынужденный процесс  $\varepsilon^b(t) = A \sin(\omega^0 t)$ . Положим, что нелинейный элемент гармонически линеаризован и  $N(A)$  — его описывающая функция. Воспользуемся уравнением вынужденного процесса

$$\varepsilon^b(t) = u^*(t) - \int_0^{\infty} k(\tau) \Phi(\varepsilon^b(t - \tau)) d\tau$$

и подставим туда сигналы  $u^*(t)$ ,  $\varepsilon^b(t)$ , записанные в комплексной форме. Получим

$$A \exp(j\omega^0 t) = B \exp(j\omega^0 t) \exp(j\beta) - \int_0^{\infty} k(\tau) A \exp(j\omega^0(t - \tau)) N(A) d\tau,$$

откуда после преобразования получаем основное соотношение для гармонического вынужденного процесса:

$$B \exp(j\beta) / A - N(A) W(j\omega^0) = 1.$$

Это соотношение позволяет найти амплитуду вынужденных колебаний и сдвиг фаз вынужденных колебаний по отношению к входному гармоническому воздействию. Запишем полученное соотношение в форме, удобной для графического представления:

$$W(j\omega^0) = -N^{-1}(A) + B \exp(j\beta) (AN(A))^{-1}.$$

Нанесем на комплексную плоскость частотный годограф  $W(j\omega)$  линейной части и отрицательный инверсный годограф  $-N^{-1}(A)$  гармонически линеаризованного нелинейного звена. В общем случае эти годографы не пересекаются. Отметим на частотном годографе линейного звена фиксированный вектор  $OP = W(j\omega^0)$ , на отрицательном инверсном годографе — текущий вектор  $OQ = -N^{-1}(A)$ , а также вектор их разности  $PQ = B \exp(j\beta) (AN(A))^{-1}$ . Точка Q непрерывно перемещается по кривой  $-N^{-1}(A)$  с непрерывным изменением амплитуды A. Пусть  $A^*$  — амплитуда, при которой модуль вектора PQ достигает минимума, тогда

$$|PQ_{\min}| = B^* (A^* N(A^*))^{-1}.$$

Отсюда находим минимальное значение амплитуды входного воздействия, при котором возможны вынужденные колебания на частоте  $\omega^0$  с амплитудой не меньше  $A^*$ :

$$B^* = |PQ_{\min}| A^* N(A^*).$$

Таким образом, в системе возможны вынужденные колебания с частотой  $\omega^0$  и амплитудой  $A \geq A^*$ , если  $B \geq B^*$ . Заметим, что пороговая амплитуда  $B^*$  является функцией частоты внешнего воздействия.

Рассмотрим случай, когда в нелинейной системе возникают автоколебания, тогда кривые  $W(j\omega)$ ,  $-N^{-1}(A)$  пересекаются. Если  $\omega^0 = \omega^a$ , то  $|PQ_{\min}| = 0$  и значение пороговой амплитуды на частоте автоколебаний равно нулю. Качественный вид зависимо-

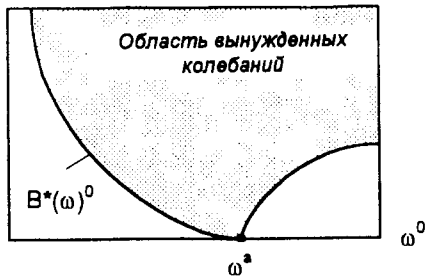


РИС. 88

сти  $V^* = V^*(\omega^0)$  изображен на рис. 88, там же отмечена область, где возможны вынужденные колебания. При  $\omega^0$ , близких к  $\omega^a$ , даже при

малых амплитудах внешнего воздействия автоколебания синхронизируются с вынужденной частотой. Это явление называют режимом захватывания, или принудительной синхронизацией. Вынужденные колебания на частоте  $\omega^0$ , существенно отличной от  $\omega^a$ , приводят к подавлению автоколебаний.

## 9.5. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

Количественные оценки качества нелинейной системы управления в полной мере могут быть определены по кривым переходного процесса, которые можно построить приближенно или с использованием вычислительных средств, и в отдельных частных случаях найти аналитически.

Метод приближенного построения переходного процесса в нелинейных системах [8], допускающих гармоническую линеаризацию, аналогичен приближенным частотным методам построения переходного процесса в линейных системах. Отличие состоит в том, что если для линейных систем передаточная функция не зависит от входного сигнала, то в гармонически линеаризованных нелинейных системах имеется не одна передаточная функция, а семейство передаточных функций  $\tilde{W}(j\omega; A) = N(A)W(j\omega)$ , в котором параметром оказывается амплитуда входного сигнала. Поэтому фиксируется ограниченный набор значений параметра  $A_i$  — амплитуд входного сигнала и для каждого значения выполняется процедура линейного построения переходного процесса. По построенным частным кривым переходного процесса строится результирующий переходный процесс по некоторому эвристическому правилу [8].

Более точным и прогрессивным методом построения переходных процессов и оценки качества нелинейных систем является метод моделирования вычислительными средствами.

Анализ качества процессов в нелинейной системе, испытывающей случайное воздействие, выполняют по стохастически линеаризованной системе. Вынужденный процесс в системе определяется выражением

$$\varepsilon^a(t) = u^*(t) - K_s(\sigma) \int_0^{\infty} k(\tau) \varepsilon^a(t - \tau) d\tau,$$

где  $u^*(t)$  — входной случайный процесс;  
 $K_s(\sigma)$  — коэффициент стохастической линеаризации нелинейного элемента.

Передаточная функция по ошибке линеаризованной системы имеет вид

$$H_e(s; \sigma) = (1 + K_s(\sigma)W(s))^{-1},$$

поэтому дисперсия ошибки может быть вычислена по выражению

$$D_e(\sigma) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} |H_e(j\omega; s)|^2 S_u(\omega) d\omega,$$

где  $S_u(\omega)$  — спектральная плотность входного случайного процесса.

### Примеры

1. На рис. 89 представлена структура нелинейной системы стабилизации числа оборотов дизельного двигателя [8]. В системе имеются нелинейный регулятор с характеристикой  $\Phi(\varepsilon) = 0,25 \text{sat}(\text{dez}(\varepsilon/1,5))$ , сервопривод с передаточной функцией  $1/s$  и местная обратная связь с выхода сервопривода на вход регулятора. Кроме того, на вход регулятора подается сигнал от инерционного измерителя оборотов, передаточная функция которого определяется по выражению

$$W_1(s) = 0,25/(0,1s + 1).$$

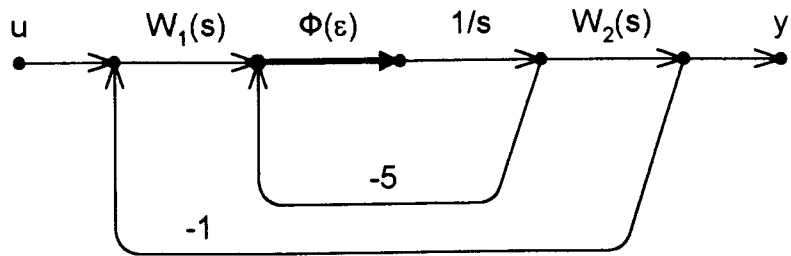


РИС. 89

Передаточная функция самого дизеля принята в виде

$$W_2(s) = 336/(0,83s + 1).$$

Для построения переходного процесса определяем передаточную функцию разомкнутой части гармонически линеаризованной системы:

$$W(s) = 84N(A)/((0,83s + 1)(0,2s + 1)(s + 5N(A))),$$

где описывающая функция нелинейного элемента вычисляется по выражению

$$N(A) = \begin{cases} 0,53(0,142 - \sin 2\alpha), & 1,5 < |A| < 3; \\ 0, & |A| < 1,5; \\ 0,53(2\alpha - 2\beta - \sin 2\alpha + \sin 2\beta), & |A| > 3; \end{cases}$$

$$\alpha = \arcsin 1,5/A; \quad \beta = \arcsin 3/A.$$

Определяем передаточную функцию замкнутой линеаризованной системы и ее вещественную часть, по которой известными в линейной теории методами, например методом трапеций, приближенно строятся три переходных процесса для трех различных значений входного сигнала:  $A_i = 4,5; 6,0; 9,0$  (рис. 90, а). Затем по этим частным составляющим переходного процесса строится искомый переходный процесс, представленный на рис. 90, б.

2. На нелинейную систему с релейной характеристикой нелинейного звена  $\Phi(\varepsilon) = N \operatorname{sgn} \varepsilon$  воздействует стационарный гауссов случайный процесс со спектральной плотностью  $S_u(\omega) = b_0/(1+a^2\omega^2)$ . Линейная часть системы имеет передаточную функцию в виде  $W_1(s) = k/(s(Ts + 1))$ .

РИС. 90

Коэффициент стохастической линеаризации идеального реле определяется по выражению

$$K_s(\sigma) = 2N/(2\pi\sigma^2)^{0,5}.$$

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке имеет вид

$$H_e(s) = s(Ts + 1)/(s(Ts + 1) + kK_s(\sigma)),$$

поэтому дисперсию ошибки будем вычислять по выражению [7.3]:

$$D_e(\sigma) = b_0\pi^{-1} \int_0^{\infty} (T^2(j\omega)^4 + (j\omega)^2)/|aT(j\omega)^3 + (T + a)(j\omega)^2 + (1 + akK_s(\sigma))(j\omega) + kK_s(\sigma)|^2 d\omega.$$

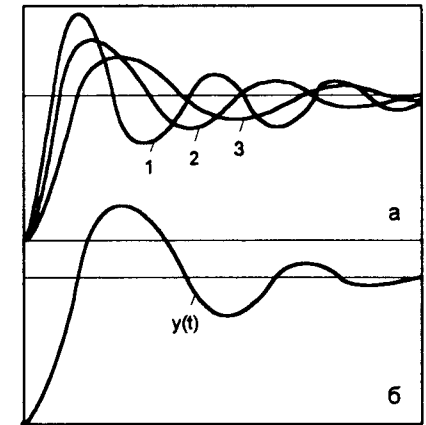
Для вычисления этого интеграла воспользуемся приемом (см. разд. 7.3).

Составим матрицу Гурвица по дробно-рациональному выражению подынтегральной функции:

$$G = \begin{pmatrix} T+a & kK_s(\sigma) & 0 \\ aT & 1+akK_s(\sigma) & 0 \\ 0 & T+a & kK_s(\sigma) \end{pmatrix};$$

ее определитель равен  $kK_s(\sigma)(T + a(1 + akK_s(\sigma)))$ .

$$M = \det \begin{pmatrix} b_0T^2 & b_0 & 0 \\ aT & 1+akK_s(\sigma) & 0 \\ 0 & T+a & kK_s(\sigma) \end{pmatrix} = b_0kK_s(\sigma)T(T(1 + akK_s(\sigma)) - a).$$





Окончательное выражение для дисперсии ошибки принимает вид

$$D_{\sigma}(\sigma) = [0,5b_{\sigma}/a] (T + \text{Tak}K_s(\sigma) - a)/(T + a^2kK_s(\sigma) + a),$$

из которого видно, как изменяется дисперсия входного процесса:  $D_u = 0,5b_{\sigma}/a$ .

Заметим, что при достаточно большом значении коэффициента передачи линейной части дисперсия ошибки отличается от дисперсии входного сигнала в  $0,5T/a$  раз.

## 9.6. УПРАЖНЕНИЯ

1. На рис. 91 приведен фазовый портрет нелинейной системы. Провести качественный анализ устойчивости точек покоя и различных траекторий.

2. Исследовать устойчивость в малом положения равновесия нелинейной системы:

а)  $x'_1 = x_1 - x_2 + x_1x_2$ ;  
 $x'_2 = x_1 - x_2 - x_2^2$ ;

б)  $x'_1 = x_1$ ;  
 $x'_2 = \sin(x_1 + x_2)$ ;

в)  $x'_1 = (4 - 2,5x_2)x_1$ ;  
 $x'_2 = (-2 + x_1)x_2$ .

3. Исследовать устойчивость в малом положения равновесия нелинейной системы канонической структуры, в которой

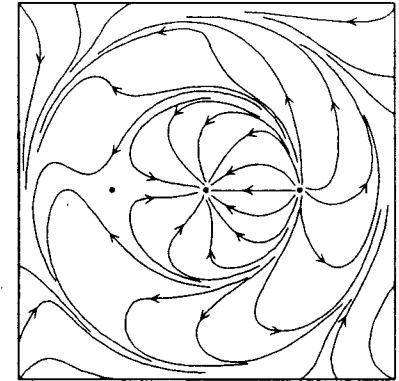
а)  $\Phi(\varepsilon) = \cos \varepsilon$ ;  
 $W(s) = 6/(s(s + 3))$ ;

б)  $\Phi(\varepsilon) = 4\varepsilon^3 - \varepsilon$ ;  
 $W(s) = 3/((s + 1)(s + 4))$ ;

в)  $\Phi(\varepsilon) = 18\text{sat}((\text{dez } \varepsilon)/1,5)$ ;  
 $W(s) = 1/((s - 2)(s + 3))$ .

4. Используя функцию  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  в качестве функции Ляпунова, исследовать устойчивость движения нелинейной системы:

РИС. 91



а)  $x'_1 = -x_1 \sin^2 x_1$ ;  
 $x'_2 = -x_2(1 + x_2^3)$ ;

б)  $x'_1 = -x_1^3 - x_2$ ;  
 $x'_2 = x_1 - x_2^3$ ;

в)  $x'_1 = x_2$ ;  
 $x'_2 = -x_1 - (\sin x_2^2)x_2$ .

5. Показать, используя функцию  $V(x_1, x_2) = 3x_1x_2^2 - x_1^3$ , что для системы

$$x'_1 = x_2^2 - x_1^2; \quad x'_2 = 2x_1x_2$$

положение равновесия неустойчиво.

6. Известен практический прием определения условий для абсолютной асимптотической устойчивости нелинейной системы с заданной нелинейностью  $\Phi(\varepsilon)$ . Согласно этому приему следует:

- аппроксимировать нелинейность  $\Phi(\varepsilon)$  прямой  $k\varepsilon$ ;
- подобрать коэффициенты квадратичной формы так, чтобы она оказалась функцией Ляпунова для линеаризованной системы;
- применить найденную функцию Ляпунова  $V(x)$  к исходной нелинейной системе и использовать требования отрицательной определенности полной производной  $V'(x)$  в силу нелинейной системы для определения допустимых границ линейной аппроксимации нелинейности  $\Phi(\varepsilon)$ , определяя тем самым сектор абсолютной устойчивости.

Используя данный прием, найти сектор абсолютной устойчивости нелинейной системы управления канонической структуры, у которой

$$\Phi(\varepsilon) \cong 2\varepsilon; \quad W(s) = 1/(s(s + 2))$$

и функция Ляпунова принимается в виде квадратичной формы двух переменных.

7. Исследовать абсолютную устойчивость системы, состоящей из нелинейного регулятора и линейной части с передаточной функцией:

а)  $W(s) = (s + 4)/((s + 5)(s + 3)(s + 2));$

б)  $W(s) = 10/((s^2 + 4)(s + 2));$

в)  $W(s) = (s + 1)/((s^2 - 4)(s + 3)).$

8. Определить сектор Попова и условия абсолютной асимптотической устойчивости нелинейной системы с линейной частью, содержащей звено запаздывания:

$$W(s) = e^{-s}(s + 3)/((s + 1,5)(s + 2)).$$

9. Определить параметры автоколебаний в системе с нелинейным регулятором, с характеристикой двухпозиционного реле с прямоугольным гистерезисом, у которой  $\Phi_0 = 5$ ,  $\lambda = 0,1$  и линейная часть имеет передаточную функцию:

$$W(s) = 0,06/((s + 0,5)(s + 0,33)(s + 1)).$$

10. Определить величину коэффициента усиления линейной части нелинейной системы для возбуждения автоколебаний с амплитудой не более 2,5, если

$$\Phi(\epsilon) = \text{sat } \epsilon; \quad W(s) = k/(s^3 + 2s^2 + s + 1).$$

# **СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

# 10 СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

---

---

*Методы последовательной и параллельной коррекции — Типовые регуляторы — Синтез последовательно-подчиненных регуляторов — Упражнения.*

Задача синтеза систем управления состоит в выборе принципов управления, подборе структуры и определении параметров управляющего устройства, которые обеспечивают требуемые показатели качества управления.

Современные методы решения задачи синтеза представлены двумя группами: в первую входят методы, использующие внешние модели системы и ее частотные характеристики; вторую группу представляют методы, использующие внутренние модели системы. Первую группу составляют приближенные методы синтеза, вторую — аналитические. Почти все методы синтеза располагают интерактивными машинными средствами поддержки.

## 10.1 МЕТОДЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ

Частотные характеристики системы дают достаточные сведения о качестве переходных процессов управления. Так, например, по логарифмической амплитудной частотной характеристике разомкнутого контура системы можно определять статическую и динамическую точность, колебательность, быстродействие и перерегулирование переходного процесса в замкнутой системе. Таким образом, показатели качества синтезируемой системы определяют требования на необходимую форму и параметры частотных характеристик.

Формирование необходимых частотных характеристик замкнутой системы, а значит и решение задачи синтеза, может

- 
- 10. СИНТЕЗ  
ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ  
В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ
- 
- 11. СИНТЕЗ  
ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ  
ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ
- 
- 12. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ
- 
- 13. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ  
СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

быть достигнуто путем введения в систему корректирующих устройств, видоизменяющих динамические свойства системы.

Корректирующие устройства могут быть введены последовательно в цепь сигнала ошибки или параллельно в цепь местной обратной связи. Оба способа имеют свои особенности и незначительные преимущества, поэтому выбор соединения является вопросом, скорее, техническим, чем теоретическим. Возможны комбинированные способы.

Последовательная коррекция осуществляет преобразование сигнала ошибки, формируя закон управления, например, пропорциональный, дифференциальный, интегральный (П, И, Д) или более сложные смешанные законы: пропорционально-интегральный, пропорционально-дифференциальный, пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИ, ПД, ПИД) — законы регулирования.

Идея метода последовательной коррекции основана на связи вещественной частотной характеристики замкнутой системы с параметрами переходного процесса, с одной стороны, и логарифмическими частотными характеристиками разомкнутой системы — с другой. При известных логарифмических частотных характеристиках объекта регулирования  $L_0(\omega)$ ,  $\varphi_0(\omega)$  и сформированных на основе исходных требований качества "желаемых" логарифмических частотных характеристиках разомкнутого контура системы  $L^*(\omega)$ ,  $\varphi^*(\omega)$  искомые логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики регулятора  $L_p(\omega)$ ,  $\varphi_p(\omega)$ , определяются выражениями

$$L_p(\omega) = L^*(\omega) - L_0(\omega),$$

$$\varphi_p(\omega) = \varphi^*(\omega) - \varphi_0(\omega).$$

Синтез контура регулирования, таким образом, сводится к подбору динамического звена с частотными характеристиками  $L_p(\omega)$ ,  $\varphi_p(\omega)$  и к расчету соответствующих параметров этого звена.

Построение желаемых амплитудной и фазовой частотных характеристик производят по исходным требованиям качества  $\sigma$ ,  $t_p$  и коэффициентам ошибки  $c_0$ ,  $c_1$ , ...

• Частоту среза желаемой характеристики  $L^*(\omega)$  выбирают из условия  $\omega_c \geq \omega_c^*$ , где  $\omega_c^*$  находят по заданному значению перерегулирования  $s$  из номограммы В.В. Солодовникова [4] или по ее табличному эквиваленту:

$$\omega_c^* = \alpha \pi / t_p, \quad \alpha = \alpha(\sigma):$$

$\sigma, \%$ ...	10	20	30	40
$\alpha$ .....	0,914	2,625	3,875	5,066

• Среднечастотная часть желаемой характеристики  $L^*(\omega)$  проводится через  $\omega_c$  с наклоном  $-20$  дБ/дек. в интервале частот  $(\omega_2, \omega_3)$ ,  $\omega_2 < \omega_3$ . При этом  $\omega_3 = (2, \dots, 4)\omega_c$ ,  $\omega_2 = \omega_c^2/\omega_3$ , избыток фазы  $\pi - \varphi^*(\omega_2)$  на левом конце и избыток фазы  $\varphi^*(\omega_3) - \pi$  на правом конце интервала должен быть не менее  $40^\circ$ .

Низкочастотная часть желаемой характеристики  $L^*(\omega)$  принимается совпадающей с низкочастотной частью характеристики  $L_0(\omega)$ , которая принимает на частоте  $\omega = 1$  значение  $20 \lg k$ ,  $k \geq 1/c_1$  и имеет асимптотический наклон  $-20\nu$  дБ/дек., где  $\nu$  — порядок астатизма объекта.

• Сопряжение среднечастотной части характеристики  $L^*(\omega)$  с ее низкочастотной частью выполняется в интервале частот  $(\omega_2, \omega_1)$  прямыми с наклоном  $-40$  дБ/дек. или  $-60$  дБ/дек. Сопряжение среднечастотной части характеристики  $L^*(\omega)$  с ее высокочастотной частью выполняется в интервале частот  $(\omega_3, \omega_4)$ ,  $\omega_4 = (6, \dots, 8)\omega_c$  прямыми с наклоном  $-40$  дБ/дек. При сопряжении среднечастотной части характеристики следует контролировать, чтобы избыток фазы на концах интервала был не менее  $40^\circ$ .

• Искомая передаточная функция корректирующего звена — пассивного или активного четырехполюсника — находится по виду найденных частотных характеристик  $L_p(\omega)$ ,  $\varphi_p(\omega)$  с использованием специальных таблиц [4, 5].

Завершает процедуру синтеза проверочный расчет или моделирование переходных процессов в скорректированной системе.

### Пример

Выполнить, используя последовательную коррекцию, синтез замкнутой системы, у которой прямой тракт имеет передаточную функцию

$$W_0(s) = 200/(s(0,1s + 1)(0,02s + 1)(0,005s + 1)),$$

так, чтобы переходный процесс обработки входного ступенчатого сигнала имел перерегулирование не более 30 % и время регулирования не более 0,8 с.

На рис. 92 представлены логарифмические частотные характеристики  $L_0(\omega)$ ,  $\varphi_0(\omega)$  прямого тракта системы.

1. Для построения желаемой логарифмической амплитудной частотной характеристики определим частоту среза:  $\omega_c \geq 3,875\pi/0,8 = 15,2 \text{ с}^{-1}$ .

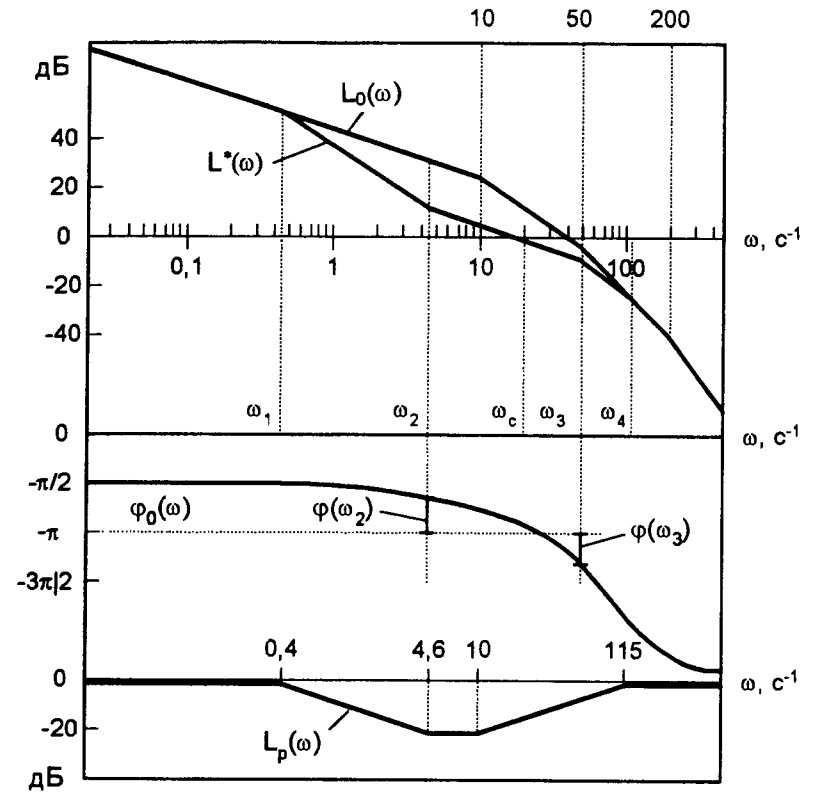
2. Среднечастотная часть желаемой характеристики занимает интервал  $(\omega_2, \omega_3)$ ,  $\omega_3 = 30, \dots, 60 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 3,8, \dots, 7,7 \text{ с}^{-1}$ . Избыток фазы, определяемый по рис. 92, на левом конце интервала  $\pi - \varphi^*(\omega_2)$  колеблется от  $80$  до  $63^\circ$ , на правом — от  $30$  до  $58^\circ$ , поэтому правая граница интервала должна быть изменена:  $\omega_3 = 45, \dots, 60 \text{ с}^{-1}$ .

3. Выполняем сопряжения низкочастотной и высокочастотной частей характеристики так, что  $\omega_1 = 0,4 \text{ с}^{-1}$  и  $\omega_4 = 115 \text{ с}^{-1}$ .

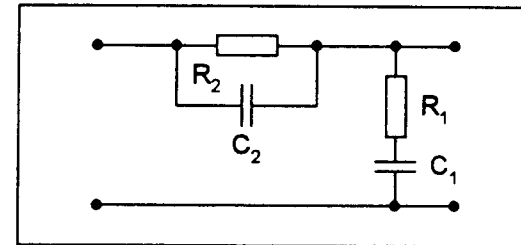
4. Определяем амплитудную частотную характеристику корректирующего звена, вид которой (рис. 92, а), позволяет найти передаточную функцию и схему (рис. 92, б) этого звена:

$$W_p(s) = (T_1s + 1)(T_2s + 1)/(T_3s + 1)(T_4s + 1),$$

где  $T_1 = R_1C_1$ ,  $T_2 = R_2C_2$ ,  $T_3 + T_4 = T_1(1 + R_2/R_1) + T_2$  составляют три соотношения для определения четырех параметров звена. Положим,  $C_1 = 0,5 \text{ мкФ}$ , тогда остальные три параметра определяются однозначно:  $T_1 = 1/4,6 \text{ с}$ ;  $T_2 = 1/10 \text{ с}$ ;  $T_3 = 1/0,4 \text{ с}$ ;  $T_4 = 1/115 \text{ с}$ , поэтому  $R_1 = 435 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 2,0 \text{ МОм}$ ,  $C_2 = 0,05 \text{ мкФ}$ .



а



б

РИС. 92

Выбор типа соединения корректирующего звена является в основном вопросом техническим, поскольку для каждого корректирующего звена одного типа соединения существует звено другого типа соединения с теми же динамическими свойствами:  $W_{p1}W_0 = W_{p2} + W_0 = W_0/(1 + W_{p3}W_0)$ . В некоторых случаях параллельное соединение корректирующего звена приводит к более простой технической реализации.

### Пример

На рис. 93, а приведена структура системы, у которой коррекцию предполагается выполнить встречно-параллельным соединением, охватив обратной связью регулятор. Система должна иметь следующие свойства: быть статической, коэффициент передачи не менее 250, переходный процесс не должен иметь перерегулирование более 18 %, время регулирования не должно превышать 0,9 с.

Неизменяемая часть системы имеет

$$W_0 = 25/(0,4s + 1);$$

$$W_1 = k/(0,0625s^2 + 0,35s + 1);$$

$$W_2 = 5/(0,07s + 1).$$

Передаточная функция разомкнутой части системы имеет вид

$$W = W_0W_1W_2/(1 + W_pW_1).$$

В среднечастотном интервале логарифмической амплитудной характеристики разомкнутой части системы, который в основном определяет качество замкнутой системы, модуль передаточной функции может быть представлен приближенным выражением  $|W| \sim |W_0W_2/W_p|$ , поскольку в этом интервале  $|W_pW_1| \gg 1$ . Если теперь этому выражению амплитудной частотной характеристики придать желаемый вид  $|W^*| = |W_0W_2/W_p|$ , то оно позволит определить передаточную функцию корректирующего звена  $|W_p| = |W_0W_2/W^*|$  по правилу  $L_p(\omega) = L_{20}(\omega) + {}_{-1}L^*(\omega)$ ,

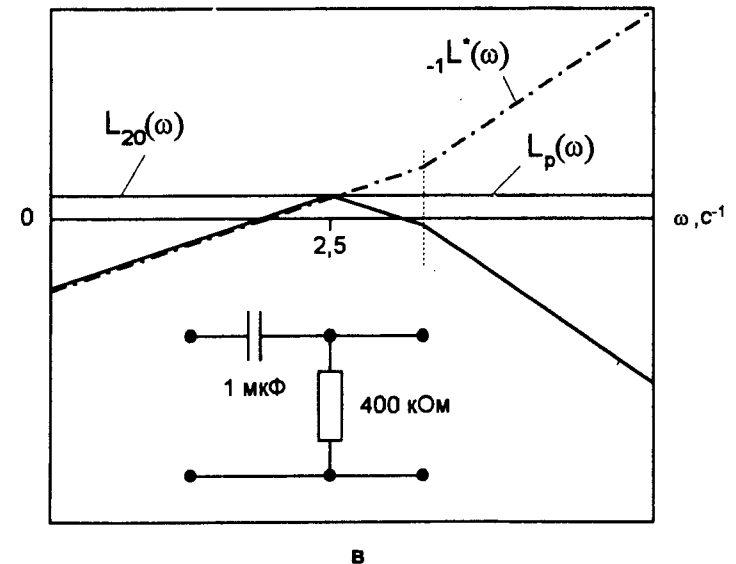
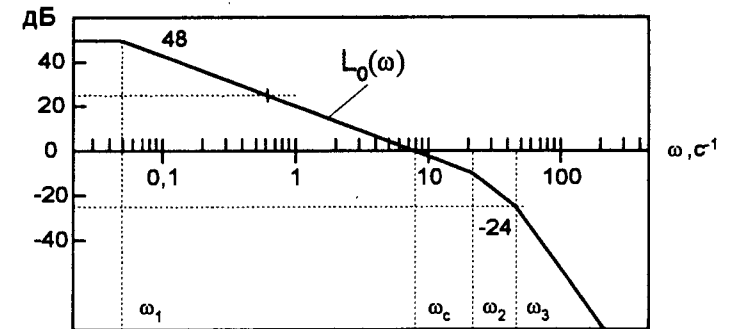
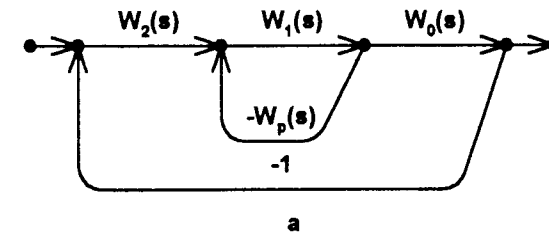


РИС. 93

где обозначено:

$$L_p(\omega) = 20 \lg |W_p|;$$

$$L_{20}(\omega) = 20 \lg |W_0 W_2|;$$

$$L^*(\omega) = 20 \lg |1/W^*|.$$

На рис. 93, б приведены кривые  $L_p(\omega)$ ,  $L_{20}(\omega)$ ,  $L^*(\omega)$  и  $L^*(\omega)$ , причем последняя кривая — “желаемая” логарифмическая амплитудная частотная характеристика разомкнутой части системы, построенная по требуемым параметрам. Частота среза:  $\omega_c \geq 2,283 \pi / 0,9 = 8 \text{ с}^{-1}$ , низкочастотная часть характеристики параллельна оси абсцисс на уровне  $20 \lg 250 = 48 \text{ дБ}$ , сопряжение низкочастотной и среднечастотных частей имеет место на частоте  $\omega_1 = 0,06 \text{ с}^{-1}$ , величина  $\omega_2$  принята равной  $10,6 \text{ с}^{-1}$ , чтобы обеспечить запас устойчивости по амплитуде  $-10 \text{ дБ}$ ,  $\varphi(\omega_2) = -180^\circ$ . Высокочастотная часть желаемой характеристики формируется так, чтобы параллельное корректирующее устройство имело простую реализацию, для чего наклоны и частоты сопряжения желаемой характеристики на высоких частотах принимаются совпадающими с наклонами и частотами характеристики неизменяемой части. В нашем случае высокочастотная часть желаемой характеристики принята в виде двух прямых с наклонами  $-40 \text{ дБ/дек.}$  и  $-80 \text{ дБ/дек.}$  соответственно.

Построенная кривая  $L_p(\omega)$  имеет вид, по которому можно выбрать структуру, а затем и передаточную функцию корректирующего звена:  $W_p(s) = s/(0,4s + 1)$ , который реализуется RC-схемой. На рис. 93, в изображена схема корректирующего звена.

## 10.2. ТИПОВЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ

Регулятор или управляющее устройство является необходимым элементом любой системы автоматического управления. Регулятор измеряет отклонение регулируемой величины от ее заданного значения и на этом основании вырабатывает сигнал воздействия на исполнительный орган объекта управления. В общем случае регулятор системы может выполнять функции чувствительного элемента, задающего устройства, усилительного, управляющего и исполнительного устройств, однако основными функциями типового регулятора все же являются усиление сиг-

нала рассогласования и формирование корректирующих сигналов от ошибки, ее производной и интеграла ошибки.

Различают несколько разновидностей регуляторов в зависимости от алгоритма формирования корректирующего сигнала: **пропорциональный** (П-регулятор), **интегральный** (И-регулятор), **пропорционально-интегральный** (ПИ-регулятор), **пропорционально-дифференциальный** (ПД-регулятор), **пропорционально-интегрально-дифференциальный** (ПИД-регулятор).

- П-регулятор имеет статическую линейную характеристику, передаточная функция его равна  $k_p$ . П-регулятор безынерционно реагирует на ступенчатое воздействие.
- И-регулятор имеет передаточную функцию вида

$$W(s; T_{\text{и}}) = 1/(T_{\text{и}}s),$$

где параметр  $T_{\text{и}}$  называют **временем интегрирования**.

На входной единичный ступенчатый сигнал И-регулятор реагирует линейным сигналом (рис. 94, а), причем за время  $T_{\text{и}}$  выходной сигнал достигнет единицы;

- ПИ-регулятор имеет двухпараметрическую передаточную функцию вида

$$W(s; k_p, T_{\text{и}}) = k_p(1 + T_{\text{и}}s)/(T_{\text{и}}s),$$

в которой настраиваемые параметры:

$k_p$  — **коэффициент передачи**;

$T_{\text{и}}$  — **постоянная времени**, или **время изодрома**.

ПИ-регулятор является астатическим регулятором, он совмещает в себе свойства П и И-регуляторов, его реакция на единичное воздействие представляется мгновенным скачком величины  $k_p$  и последующим линейно растущим сигналом с наклоном  $T_{\text{и}}/k_p$ .

Структурная модель регулятора может быть представлена двояко: как параллельно соединенные пропорциональное и интегрирующее звенья или как последовательно соединенные форсирующее и интегрирующее звенья. Значит, ПИ-регулятор обладает свойством упреждения: выходной сигнал сдвинут так,

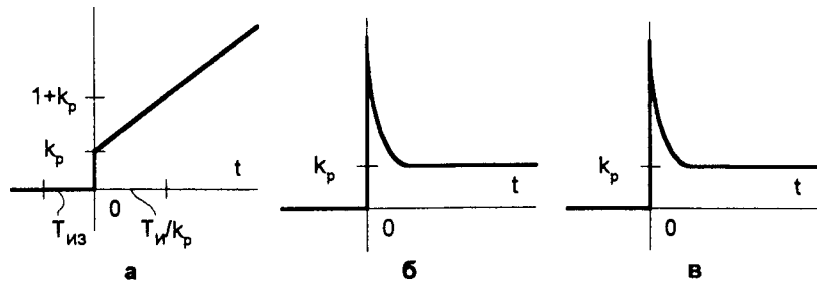


РИС. 94

как будто интегрирование началось раньше входного сигнала на время изодрома;

- ПД-регулятор имеет передаточную функцию вида

$$W(s; k_p, T_d) = k_p(1 + T_d s),$$

где параметр  $T_d$  называют **временем дифференцирования**, или **временем упреждения**;  
 $k_p$  — **коэффициент передачи**.

ПД-регулятор объединяет свойства пропорционального и дифференцирующего звена, поэтому в стационарном режиме, когда входной сигнал не изменяется, регулятор ведет себя как пропорциональное звено, но при изменении входного сигнала вырабатывается дополнительная составляющая, соответствующая производной от входного сигнала. Переходная функция ПД-регулятора показана на рис. 94, б;

- ПИД-регулятор имеет трехпараметрическую передаточную функцию вида

$$W(s; k_p, T_i, T_d) = k_p(1 + 1/(T_i s) + T_d s),$$

где постоянные  $T_i, T_d$  — **время изодрома** и **время упреждения** соответственно;  
 $k_p$  — **коэффициент передачи**.

Структурная модель ПИД-регулятора может быть представлена в мультипликативной и аддитивной формах:

$$W(s; k_{p1}, T_{i1}, T_{d1}) = k_{p1}(1 + T_{i1}s)(1 + T_{d1}s) / (T_{i1}s);$$

$$W(s; k_{p2}, T_{i2}, T_{d2}) = k_{p2} + 1/(T_{i2}s) + T_{d2}s.$$

На рис. 94, в приведена переходная характеристика ПИД-регулятора. Логарифмическая амплитудная частотная характеристика ПИД-регулятора имеет симметричный вид относительно своей среднечастотной части, наклон в низкочастотной части характеристики составляет  $-20$  дБ/дек., в высокочастотной части составляет  $20$  дБ/дек. Средние частоты подавляются ПИД-регулятором.

Соединения регуляторов между собой позволяют менять структуру и параметры регуляторов. Так, последовательное соединение П и И-регуляторов оставляет структуру И-регулятора, но изменяет время интегрирования в  $k_p$  раз; параллельное соединение этих же регуляторов порождает структуру ПИ-регулятора. Последовательное соединение ПД и И-регуляторов порождает ПИ-регулятор, параллельное соединение этих же регуляторов порождает ПИД-регулятор. Последовательное и параллельное соединение ПИ и ПД-регуляторов порождает структуру ПИД-регулятора, но, естественно, с разными параметрами.

Часто в практике использования типовых регуляторов возникает необходимость в сглаживании входного сигнала регулятора без изменения коэффициента передачи. Для этой цели используются фильтры на основе инерционных звеньев.

Типовые регуляторы являются, по существу, идеальными динамическими звеньями. Динамические характеристики реальных регуляторов электрических, пневматических, гидравлических и комбинированных могут значительно отличаться от идеальных. Модель реального регулятора можно представить в виде последовательного соединения идеального регулятора и так называемого балластного звена. Часто балластным звеном оказывается инерционное звено. Допустимые отклонения частотных характеристик регуляторов регламентированы стандартом на промышленные регуляторы.

### Примеры

1. Последовательное соединение ПИ-регулятора с параметрами  $k_{p1}, T_i$  и ПД-регулятора с параметрами  $k_{p2}, T_d$  приводит, с очевидностью, к структуре ПИД-регулятора с параметрами  $k_p = k_{p1}k_{p2}, T_i, T_d$ :

$$W(s) = (k_{p1}(1 + T_i s)/(T_i s))(k_{p2}(1 + T_d s)).$$



Параллельное соединение тех же регуляторов приводит к структуре ПИД-регулятора, у которого коэффициент передачи  $k_p = k_{p1} + k_{p2}$ , время изодабра равно  $T_{и}/k_{p1}$ , время упреждения равно  $k_{p2}T_d$ .

$$W(s) = k_{p1}(1 + T_{и}s)/(T_{и}s) + k_{p2}(1 + T_d s) = (k_{p1} + k_{p2}) + k_{p1}/(T_{и}s) + k_{p2}T_d s.$$

2. Передаточная функция реального Д-регулятора имеет вид

$$W(s) = k_p s / (1 + T_0 s),$$

где  $T_0$  — постоянная времени балластного звена. Если переходная характеристика идеального регулятора является идеальным  $\delta$ -сигналом, то реакция реального Д-регулятора на ступенчатое воздействие имеет вполне реальный вид

$$h(t) = k/T_0 \exp(-t/T_0),$$

и чем меньше величина балластной постоянной, тем ближе реальный регулятор к идеальному. Частотный годограф реального Д-регулятора представляется полукругностью с центром в точке  $k_p/2T_0$  на действительной оси, годограф начинается в нуле и заканчивается в точке  $k_p/T_0$ . Логарифмическая частотная характеристика реального Д-регулятора почти совпадает на низких частотах с идеальной, а на высоких совпадает с характеристикой П-регулятора.

Особенностью реального управления многими инерционными технологическими процессами, такими, как процесс регулирования давления, расхода, уровня, температуры, является аperiodичность переходных характеристик. Общий вид экспериментальных переходных кривых таких процессов характеризуется тремя основными параметрами:  $T$ ,  $\tau$ ,  $K$  — **постоянной времени, временем отставания и скоростью нарастания** соответственно, а простейшей обобщенной моделью является модель

$$W(s) = Ke^{-sr} / (s + 1/T).$$

Для управления такими процессами обычно используется ПИД-регулятор, особенно тогда, когда  $T > (5, \dots, 10)\tau$ .

Широкое применение ПИД-регуляторов можно объяснить тем, что эти регуляторы выпускаются в разнообразном аппаратном исполнении: электрическом, пневматическом, электромеханическом, гидравлическом, электрогидравлическом, компьютерном. Расчет параметров ПИД-регулятора достаточно прост и практически табулирован. Практика настройки системы с ПИД-регулятором доведена до простейших приемов, в чем можно убедиться, используя **метод Циглера-Николса**.

В этом методе используются только два параметра:  $\tau$ ,  $K$ , и метод оказывается тем более точным, чем больше величина третьего параметра  $T$ . Правила настройки регулятора состоят из двух шагов:

- на первом регулятор рассматривают как пропорциональный, увеличивают коэффициент передачи прямого тракта до предельного значения  $k^*$ , когда система выходит на границу устойчивости и совершает незатухающие колебания с периодом  $T^* = 2\pi/\omega^*$ ;
- на втором шаге определяют параметры регулятора по правилу:

для П-регулятора  $k_p = 0,5k^*$ ;

для PI-регулятора  $k_p = 0,45k^*$ ,  $T_{и} = 0,83T^*$ ;

для ПИД-регулятора  $k_p = 0,6k^*$ ,  $T_{и} = 0,5T^*$ ,  $T_d = 0,125T^*$ .

Показатели  $k^*$ ,  $T^*$ , по которым определяются параметры настройки регуляторов, находятся расчетным путем, с использованием  $W(j\omega)$  — частотного годографа Найквиста. В самом деле, предельный коэффициент усиления  $k^*$  и период  $T^* = 2\pi/\omega^*$  однозначно определяются из условия  $W(j\omega^*) = -1$ , когда частотная характеристика разомкнутой части системы проходит через точку  $-1$  на действительной оси.

Параметры регулятора могут быть определены и по экспериментально снятой кривой переходного процесса:

для П-регулятора  $k_p = 1/(rK)$ ;

для PI-регулятора  $k_p = 0,9/(rK)$ ,  $T_{и} = 3,3\tau$ ;

для ПИД-регулятора  $k_p = 1,2/(rK)$ ,  $T_{и} = 2\tau$ ,  $T_d = 0,5\tau$ .

### 10.3. СИНТЕЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПОДЧИНЕННЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Обобщением метода последовательной коррекции применительно к системам, у которых структурная модель представляется последовательным соединением инерционных и интегрирующих звеньев, является метод последовательной коррекции с подчиненным регулированием координат. Этот метод синтеза, разработанный фирмой *Siemens* в конце 50-х годов XX в., предназначался первоначально в основном для синтеза систем управления автоматизированными электроприводами.

Пусть объект управления имеет передаточную функцию вида

$$W_0(s) = \prod_{i=1}^m k_i / (T_i s + 1),$$

где  $k_i, T_i$  — параметры  $i$ -го звена структурной модели.

Постоянные времени  $T_i$  объекта управления условно разобьем на две группы — большие и малые. Звенья структуры, которым отвечают большие постоянные времени, определяют основную динамику переходных процессов в системе, ее быстродействие. Среднечастотная и низкочастотная части логарифмической амплитудной частотной характеристики системы определяются, по существу, динамическими свойствами звеньев с большими постоянными времени. Звенья с малыми постоянными времени формируют высокочастотную часть логарифмической амплитудной характеристики.

Основная идея метода коррекции состоит в последовательном включении регуляторов со структурой инерционных звеньев для "компенсации" постоянных времени первой группы, что позволит "исключить" из модели объекта, а значит, и из разомкнутой части системы звенья с большими постоянными времени. Для устранения статической ошибки и придания системе астатических свойств в прямой контур регулирования вводят интегрирующее звено и обеспечивают коэффициент передачи, равный единице. Система приобретает свойство "точного" воспроизведения и достаточно большого быстродействия в силу малости оставшихся некомпенсированных постоянных времени.

Пусть звенья модели объекта перенумерованы так, что первые  $k$  имеют "большие" постоянные времена, тогда после введения компенсирующих регуляторов передаточная функция прямого тракта системы примет вид

$$W(s) = W_p(s) W_0(s) = 1 / (T_0 s \prod_{i=k+1}^m (T_i s + 1)).$$

#### Примеры

1. Пусть объект имеет передаточную функцию  $W_0(s) = k_0 / (T_0 s + 1)$ , тогда, применив ПД-регулятор  $W_p(s) = k_p (T_p s + 1)$  и установив  $T_p \approx T_0$ , получим, что прямой тракт системы при достаточно точной компенсации оказывается безынерционным звеном  $W(s) = k_p k_0$ . Но и при неточной компенсации с ростом времени система ведет себя как пропорциональное звено. Установившееся значение реакции системы оказывается не зависящим от постоянных времени объекта и регулятора и равно

$$W(0) = W_p(0)W_0(0) = k_p (T_p s + 1) k_0 / (T_0 s + 1) |_{s=0} = k_p k_0.$$

2. Применив в условиях первого примера для компенсации постоянной времени объекта ПИ-регулятор

$$W_p(s) = k_p (T_p s + 1) / T_p s,$$

получим, что прямой тракт системы при достаточно точной компенсации  $T_p \approx T_0$  оказывается интегрирующим звеном  $W(s) = k_p k_0 / T_p s$ . Но и при неточной компенсации с ростом времени модель системы приобретает свойства интегрирующего звена с той же передаточной функцией.

Идея компенсации "больших" постоянных времени одним регулятором оказывается не реализуемой при наличии у объекта более двух таких постоянных, поскольку уже для компенсации двух постоянных времени объекта с использованием ПИД-регулятора резко снижается помехозащищенность системы. Для реализации идеи используют структуру многоконтурного регулирования с вложенными — подчиненными контурами (рис. 95), при этом в каждом внутреннем контуре регулятор компенсирует

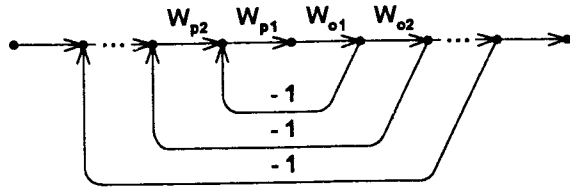


РИС. 95

не более двух постоянных времени. Настройку регуляторов такой системы выполняют независимо в каждом контуре.

Известны два способа "оптимальной" настройки регулятора контура: настройка на так называемый *технический* и *симметричный оптимум*. Выбор способа настройки регуляторов системы зависит от структуры объекта и требуемого качества переходных процессов в системе.

При настройке системы на "технический оптимум" в качестве критерия выдвигается требование — модуль частотной характеристики замкнутого контура должен быть близок к единице на возможно большем интервале частот. Это требование по существу есть условие воспроизведения входного сигнала. Среди звеньев второго и третьего порядка существуют такие, у которых после замыкания частотная характеристика принимает вид, близкий к требуемому. Рассмотрим, к примеру, два звена: интегрирующее и инерционное, охваченные обратной связью. Передаточная функция и модуль частотной характеристики такого соединения в общем случае принимают вид

$$H(s) = a_2 / (a_0 s^2 + a_1 s + a_2),$$

$$|H(j\omega)| = (a_2^2 / (a_2^2 - \omega^2(2a_0 a_2 - a_1^2) + \omega^4 a_0^2))^{0.5}.$$

Для того чтобы модуль частотной характеристики при малых  $\omega$  был близок к единице, достаточно, чтобы выполнялись условия "оптимальной" настройки:

$$a_1^2 = 2a_0 a_2, \quad (10.1)$$

при этом

$$|H(j\omega)| = (1 + \omega^4 (a_0/a_2)^2)^{-0.5}.$$

Еще один пример замкнутого контура, удовлетворяющего требованиям метода:

$$H(s) = (a_3 + a_2 s) / (a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3).$$

Если принять условия настройки в виде

$$a_1^2 = 2a_2 a_0, \quad a_2^2 = 2a_1 a_3, \quad (10.2)$$

то модуль частотной характеристики этого контура будет равен

$$|H(j\omega)| = ((1 + \omega^2 (a_2/a_3)^2) / (1 + \omega^8 (a_0/a_3)^2))^{-0.5},$$

и при достаточно малых частотах близок к единице.

### Примеры

1. Пусть объект регулирования представляется последовательно соединенными инерционными звеньями с малыми постоянными времени  $T_i$ . Передаточная функция такого объекта:

$$W_0(s) = k_0 \prod 1 / (T_i s + 1) = k_0 / (1 + s \sum T_i + s^2 \sum T_i T_j + \dots).$$

В силу малости постоянных времени

$$W_0(s) \approx k_0 / (1 + \theta s),$$

где  $\theta = \sum T_i$ .

Задачу синтеза решает применение И-регулятора. В самом деле, разомкнутый контур имеет передаточную функцию:

$$W_p(s) W_0(s) = 1 / (T_p s) k_0 / (1 + \theta s),$$

после замыкания передаточная функция контура примет "стандартный" вид

$$H(s) = k_0 / (\theta T_p s^2 + T_p s + k_0),$$

поэтому воспользуемся условиями (10.1) настройки контура на технический оптимум:

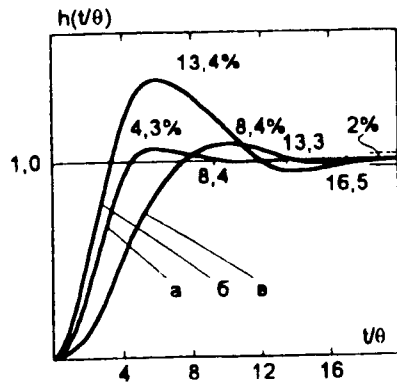


РИС. 96

$$T_p^2 = 2\theta k_0 T_p,$$

чтобы найти параметр настройки  $T_p = 2\theta k_0$  И-регулятора.

В результате такой настройки передаточная функция замкнутой системы принимает "оптимальный" вид:

$$H^*(s) = 1/(2\theta^2 s^2 + 2\theta s + 1),$$

зависящий только от суммы малых постоянных времени объекта.

Система представляется моделью звена второго порядка с постоянной времени 1,414θ и коэффициентом затухания 0,707. Переходный процесс в такой системе описывается зависимостью

$$h(t) = 1 - \exp(-0,707 t/\theta)(\cos 0,707 t/\theta + \sin 0,707 t/\theta)$$

и имеет вид, изображенный на рис. 96 (кривая а).

2: Пусть объект регулирования представляется последовательно соединенными инерционными звеньями, одно из которых имеет постоянную времени, существенно большую всех остальных. Передаточную функцию такого объекта можно представить в виде

$$W_0(s) \approx k_0 / ((T_1 s + 1)(1 + \theta s)),$$

где  $\theta$  — сумма всех остальных малых постоянных времени.

Задачу синтеза решает использование ПИ-регулятора, который позволяет компенсировать большую постоянную времени и выполнить настройку замкнутого контура на "технический оптимум". Разомкнутый контур системы имеет передаточную функцию

$$W_p(s)W_0(s) = k_p(T_p s + 1) / (T_p s \cdot k_0 / ((T_1 s + 1)(1 + \theta s))).$$

Настроим  $T_p = T_1$ . После такой компенсации передаточная функция замкнутого контура принимает "стандартный" вид:

$$H(s) = k_p k_0 / (\theta T_1 s^2 + T_1 s + k_0 k_p).$$

Воспользуемся условиями настройки контура на технический оптимум (10.1):

$$T_1^2 = 2\theta k_p k_0 T_1,$$

чтобы найти еще один параметр настройки ПИ-регулятора:

$$k_p = T_1 / 2\theta k_0.$$

В результате такой настройки передаточная функция замкнутой системы принимает "оптимальный" вид:

$$H^*(s) = 1/(2\theta^2 s^2 + 2\theta s + 1),$$

а значит, в системе будет иметь место заданный переходный процесс.

3. Пусть объект регулирования представляется последовательно соединенными инерционными звеньями, два из которых имеют постоянные времени, существенно большие всех остальных. Передаточную функцию такого объекта можно представить в виде

$$W_0(s) \approx k_0 / ((T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(1 + \theta s)),$$

где  $\theta$  — сумма всех остальных малых постоянных времени.

Задачу синтеза решает использование ПИД-регулятора, который позволяет компенсировать две большие постоянные времени и выполнить настройку замкнутого контура на технический оптимум.

Разомкнутый контур системы имеет передаточную функцию

$$W_p(s)W_0(s) = k_p(T_{p1}s + 1)(T_{p2}s + 1) / (T_{p1}s \times k_0 / ((T_1 s + 1)(1 + \theta s))).$$

Настроим  $T_{p1} = T_1$ ,  $T_{p2} = T_2$ . После такой компенсации передаточная функция замкнутого контура вновь принимает "стандартный" вид:

$$H(s) = k_p k_0 / (\theta T_1 s^2 + T_1 s + k_0 k_p),$$

при этом последний параметр настройки ПИД-регулятора принимает вновь значение  $k_p = T_1 / 2\theta k_0$ . В результате такой настройки передаточная функция замкнутой системы принимает "оптимальный" вид:

$$H^*(s) = 1 / (2\theta^2 s^2 + 2\theta s + 1),$$

а значит, в системе будет иметь место заданный переходный процесс.

Все системы, настроенные на технический оптимум, имеют с точностью до  $\theta$  один и тот же переходный процесс, изображенный на рис. 96.

4. Рассматривается объект, модель которого представляется четырьмя инерционными звеньями с постоянными времени:

$$T_1 = 0,2 \text{ с}; \quad T_2 = 0,08 \text{ с};$$

$$T_3 = 0,02 \text{ с}; \quad T_4 = 0,01 \text{ с}$$

и общим коэффициентом передачи  $k_0 = 1$ .

Исследуем возможность использования трех типов регуляторов для реализации замкнутой системы, настроенной на технический оптимум.

Будем считать, что все постоянные времени малы. В этом случае для решения задачи синтеза следует применять И-регулятор и установить значение постоянной интегрирования регулятора:  $T_p = 2k_0\theta = 0,62 \text{ с}$ ,  $\theta = 0,31$ . Получим переходный процесс с временем регулирования, равным  $t_p = 4,7\theta = 1,5 \text{ с}$ .

Выделим большую постоянную времени  $T_1 = 0,2 \text{ с}$ , считая все остальные постоянные малыми, при этом  $\theta = 0,11$ . Для

решения задачи синтеза следует применять ПИ-регулятор, установить значение постоянной интегрирования регулятора:  $T_p = 0,2 \text{ с}$ , коэффициент усиления регулятора:  $k_p = T_p / 2\theta k_0 = 0,91$ . Получим переходный процесс с временем регулирования  $t_p = 4,7\theta = 0,5 \text{ с}$ .

Выделим две большие постоянные времени  $T_1 = 0,2 \text{ с}$  и  $T_2 = 0,08 \text{ с}$ , считая все остальные постоянные малыми, при этом  $\theta = 0,03$ . Для решения задачи синтеза следует применять ПИД-регулятор, установить значения постоянных времени регулятора:  $T_{p1} = 0,2 \text{ с}$  и  $T_{p2} = 0,08 \text{ с}$ , а также коэффициент усиления регулятора  $k_p = T_{p1} / 2\theta k_0 = 0,33$ . Получим переходный процесс с временем регулирования, равным  $t_p = 4,7\theta = 0,1 \text{ с}$ .

Настройка замкнутой системы на технический оптимум оказывается невозможной для объектов, содержащих интегрирующие звенья, поскольку применение И, ПИ, ПИД-регуляторов для компенсации постоянных времени объекта приводит систему на границу устойчивости. Действительно, пусть объект имеет передаточную функцию:

$$W_0(s) = k_0 / ((T_0 s)(T_1 s + 1)).$$

Для компенсации большой постоянной времени инерционного звена объекта следует использовать ПИ-регулятор

$$W_p(s) = k_p (T_p s + 1) / (T_p s)$$

и настроить его так, что  $T_p = T_1$ , тогда замкнутый контур приобретает передаточную функцию колебательного звена

$$H(s) = k / (s^2 + 1), \quad k = k_0 k_p / T_0 T_1.$$

Для объектов, содержащих интегрирующее звено, настройку регулятора для достижения заданного качества воспроизведения входного сигнала следует осуществлять по критерию "*симметричного оптимума*". После чего логарифмическая амплитудная частотная характеристика системы приобретает

вид, симметричный относительно частоты среза и максимум запаса устойчивости по фазе приходится на окрестность частоты среза. Передаточная функция замкнутого контура и переходная характеристика такой системы принимают "стандартный вид", что позволяет утверждать: все системы, настроенные на симметричный оптимум, имеют один с точностью до суммы нескомпенсированных постоянных времени переходный процесс.

### Примеры

1. Пусть объект регулирования представляется в виде последовательно соединенных инерционных звеньев и звена интегрирования

$$W_0(s) = k_0 \Pi 1 / ((T_0 s)(T_1 s + 1)) \approx k_0' / ((T_0 s)(1 + \theta s)), \quad \theta = \sum T_i.$$

Для управления в замкнутом контуре применим ПИ-регулятор:

$$W_p(s) = k_p(T_p s + 1) / (T_p s).$$

Передаточная функция замкнутого контура принимает вид

$$H(s) = k_p k_0 (T_p s + 1) / (T_p T_1 s^3 + (T_p + T_1) s^2 + k_p k_0 T_p s + k_0 k_p),$$

который может быть оптимизирован условиями (10.2):

$$(T_p T_1)^2 = 2 k_p k_0 T_p^2 T_0 \theta;$$

$$(k_p k_0 T_p)^2 = 2 k_p k_0 T_p T_0,$$

откуда находим значения параметров регулятора:  $T_p = 4\theta$ ,  $k_p = 0,52 T_0 / (k_0 \theta)$ .

После подстановки этих оптимизированных значений параметров в передаточную функцию замкнутой системы последняя приобретает "стандартный вид":

$$H^*(s) = (4\theta s + 1) / (8\theta^3 s^3 + 8\theta^2 s^2 + 4\theta s + 1).$$

На рис. 96 (кривая б) изображен типовой вид переходного процесса замкнутой системы, настроенной на симметричный оптимум; показатели качества этого процесса таковы: время достижения равно 3,1 $\theta$  с; перерегулирование составляет 43,4 %; время регулирования равно 16,5 $\theta$  с.

2. Если объект имеет одну существенную постоянную времени  $T_1$ , а все другие — малые, в сумме меньшие  $T_1$ , то для компенсации этой одной постоянной следует применять ПИД-регулятор. Настройка этого регулятора выполняется по схеме, описанной в примере 1.

Для переходного процесса системы, настроенной на "симметричный оптимум", характерно значительное перерегулирование, которое может быть значительно снижено, если вне замкнутого контура последовательно поставить сглаживающий фильтр низких частот — инерционное звено с единичным коэффициентом передачи и постоянной времени  $4\theta$ . Передаточная функция оптимизированного контура и фильтра принимает "стандартный вид":

$$H^*(s) = 1 / (8\theta^3 s^3 + 8\theta^2 s^2 + 4\theta s + 1).$$

Переходный процесс в такой системе изображен на рис 96 (кривая в), для него время достижения равно 7,6 $\theta$  с; перерегулирование составляет 8,1 %; время регулирования равно 13,3 $\theta$  с.

### 10.4. УПРАЖНЕНИЯ

1. Передаточная функция неизменяемой части системы задается выражением

$$W(s) = 45 / (s(0,2s + 1)^2).$$

Выбрать последовательное корректирующее звено такое, чтобы обеспечить перерегулирование порядка 20 %, время регулирования не более 0,2 с при общем коэффициенте усиления прямого тракта не менее 120.

2. Определить в условиях задачи 1 структуру и параметры:

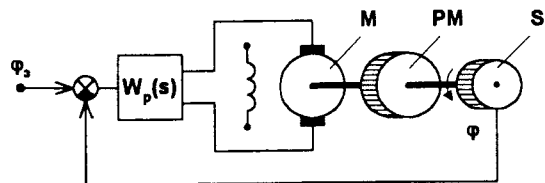


РИС. 97

- параллельного корректирующего звена;
- корректирующей обратной связи,

которые обеспечивают те же показатели качества, что и последовательная коррекция.

3. На рис. 97 изображена схема следящей системы. Разница углов поворота задающей и исполнительных осей усиливается, а затем используется как входной сигнал управляющего звена, которое выполняет одновременно и корректирующие функции. Передаточная функция разомкнутого тракта следящей системы задается выражением

$$W(s) = 0,155k / (s(0,15s + 1)(0,04s + 1)),$$

где  $k$  — коэффициент усиления активного корректирующего звена системы.

Определить структуру и параметры последовательного корректирующего звена, которое позволяет системе обрабатывать ступенчатое воздействие за время не более 0,7 с, иметь перерегулирование не более 25 % и коэффициент скоростной ошибки должен быть не более 0,08.

4. Выполнить процедуру синтеза замкнутой системы, предназначенной для обработки линейного задающего сигнала с показателями качества:  $\sigma < 20\%$ ;  $t_p < 0,8$  с,  $c_1 < 0,06$  с<sup>-1</sup>, если передаточная функция неизменяемой части контура управления задается выражением

$$W(s) = 30 / (s(0,25s + 1)(0,05s + 1)(0,08s + 1)).$$

5. Пассивные корректирующие звенья выполняются в виде RC-четырёхполюсников. Найти схемы четырёхполюсников, обладающих передаточными функциями:

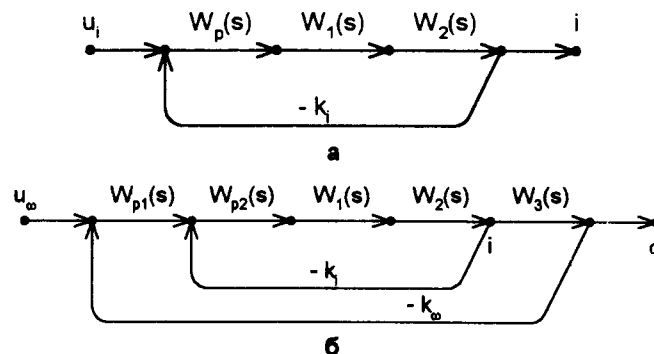


РИС. 98

- а)  $(1 + T_1s) / (1 + T_2s)$ ;
- б)  $(1 - T_1s) / (1 + T_2s)$ ;
- в)  $(1 + T_1s)(1 + T_3s) / ((1 + T_2s)(1 + T_4s))$ .

Построить частотные характеристики этих звеньев и определить RC-параметры четырёхполюсников.

6. Построить качественно переходные процессы обработки прямоугольного импульса типовыми регуляторами.

7. Построить модели реальных регуляторов и найти их частотные характеристики.

8. Для объекта с передаточной функцией  $1 / (1 + Ts)^3$  построить переходную характеристику, определить показатели  $T$ ,  $\gamma$ ,  $K$ . Определить согласно методу Циглера-Никольса показатели  $k^*$ ,  $T^*$ . Найти параметры ПИД-регулятора по показателям  $\gamma$ ,  $K$  и  $k^*$ ,  $T^*$ . Сравнить результаты настройки по двум правилам путем моделирования переходных процессов замкнутой системы.

9. Синтезировать контур регулирования тока в системе тиристорный преобразователь — двигатель, структурная модель которой представлена на рис. 98, а.

В этой модели:

$W_1(s) = k_1 / (T_1s + 1)$  — передаточная функция тиристорного преобразователя,  $T_1 = 0,01$  с;

$W_2(s) = k_2 / (T_2s + 1)$  — передаточная функция якорной цепи двигателя постоянного тока с независимым возбуждением;

$T_2$  — электромагнитная постоянная времени двигателя, значительно превосходит  $T_1$  — постоянную времени тиристорного преобразователя.

10. На рис. 98, б приведена структурная модель системы регулирования скорости двигателя постоянного тока. Система имеет два регулятора с последовательным подчинением: внутренний контур регулирования тока, описание которого дано в задаче 9, и внешний контур регулирования скорости. Передаточная функция звена, моделирующего связь между током якорной цепи и частотой вращения, имеет вид  $W_2(s) = 1/(T_3 s)$ .

Выбрать структуру регулятора скорости и подобрать его параметры так, чтобы осуществить настройку системы на "технический оптимум".

# 11 СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

---

---

*Методы аналитического конструирования регуляторов — Синтез линейного оптимального регулятора — Наблюдатели состояния линейной системы — Синтез замкнутой системы с наблюдателем состояния — Упражнения.*

Методы решения задачи синтеза замкнутых систем с заданным качеством управления, использующие внутренние модели системы, создавались как следствие "алгебраизации" теории управления, предпринятой Р. Калманом и А.М. Лётовым в 60-е годы прошлого столетия.

## 11.1. МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТОРОВ

Рассмотрим вполне управляемую и вполне наблюдаемую линейную систему с постоянными параметрами:

$$\Sigma^{(n)}: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0), \\ y = Cx. \end{cases}$$

Пусть управление в этой системе линейно зависит от координат состояния системы:

$$u(t) = u_0(t) - Kx(t),$$

где  $u_0(t)$  — входной командный сигнал;  
 $K$  — матрица коэффициентов обратной связи.

После замыкания эта система имеет структуру, изображенную на рис. 99, и ее движение описывается линейным дифференциальным уравнением:



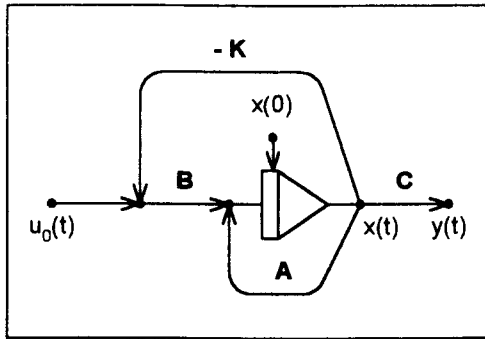


РИС. 99

$$x' = Ax + B(u_0(t) - Kx) = (A - BK)x + Bu_0(t), \quad x(0).$$

Таким образом, динамические свойства системы полностью определяются матрицей  $A - BK$ , ее характеристическими числами.

### Теорема

*Характеристические числа замкнутой системы управления могут быть произвольно размещены на комплексной плоскости путем соответствующего выбора матрицы обратной связи  $K$  тогда и только тогда, когда система вполне управляема.*

*Доказательство* этого утверждения без ограничения общности проведем для случая, когда система имеет скалярный вход. Как было показано в (2.2), любую вполне управляемую линейную систему можно линейным преобразованием координат состояния привести к каноническому виду, поэтому пусть уже матрицы системы имеют канонический вид, например вид Коши:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix};$$

$$B = (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1)^T.$$

Поскольку характеристические числа линейной системы не изменяются при невыраженном линейном преобразовании координат, то характеристический многочлен исходной системы равен

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= D_n = \lambda \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix} +$$

$$+ a_0(-1)^{n+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda D_{n-1} + a_0 = \lambda(\lambda D_{n-2} + a_1) + a_0 = \lambda(\lambda(\lambda D_{n-3} + a_2) + a_1) + a_0 = \dots$$

$$\dots = \lambda(\lambda(\lambda(\dots(\lambda D_0 + a_{n-1}) \dots) + a_2) + a_1) + a_0, \quad D_0 = 1.$$

Окончательно получаем

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^n + \lambda^{n-1} a_{n-1} + \lambda^{n-2} a_{n-2} + \dots + \lambda a_1 + a_0.$$

Коэффициенты характеристического полинома вполне управляемой системы совпадают с элементами последней строки канонической формы ее матрицы. Теперь замкнем систему, введя линейную обратную связь по состоянию:

$$u(t) = u_0(t) - Kx(t), \quad K = (k_1, k_2, \dots, k_n),$$

где  $k_1, k_2, \dots, k_n$  — коэффициенты обратной связи по каждой координате состояния.

Матрица состояния  $A - BK$  замкнутой системы принимает канонический вид:

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \mathbf{A} - (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1)^T (k_1, k_2, \dots, k_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(a_0 + k_1) & -(a_1 + k_2) & -(a_2 + k_3) & \dots & -(a_{n-1} + k_n) \end{pmatrix}.$$

Поэтому характеристический полином такой системы может быть легко определен:

$$\det(\lambda \mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = \lambda^n + \lambda^{n-1}(a_{n-1} + k_n) + \lambda^{n-2}(a_{n-2} + k_{n-1}) + \dots + \lambda(a_1 + k_2) + (a_0 + k_1).$$

Коэффициенты характеристического полинома, таким образом, могут быть сделаны подбором чисел  $k_1, k_2, \dots, k_n$  любыми! А значит, и корни характеристического уравнения замкнутой системы могут быть заданы любыми и быть произвольно размещены на комплексной плоскости.

Желаемые динамические свойства системы, а следовательно, и желаемое качество переходных процессов могут быть заложены в систему путем формирования линейной обратной связи, значение которой может быть найдено аналитически. Так, если желаемый характеристический полином  $\varphi^*(\lambda)$  приравнять к характеристическому полиному замкнутой системы  $\varphi(\lambda; \mathbf{K})$ , то получим уравнения относительно неизвестных коэффициентов матрицы обратной связи. Число этих уравнений обычно меньше числа неизвестных, поэтому выбор закона управления часто неоднозначен. Устранить неопределенность выбора можно, потребовав от системы дополнительных свойств, например сравнивая переходные процессы по некоторым числовым показателям и выбирая наилучший.

## Примеры

1. Осуществим стабилизацию положения равновесия объекта, который без управления является неустойчивым:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Спектр характеристических чисел этого объекта:  $\{0, -1, -2, 2\}$ .

Объект, как нетрудно убедиться, вполне управляем, поэтому синтез замкнутой системы управления с любым заданным качеством возможен. Потребуем, например, асимптотической устойчивости замкнутой системы стабилизации и чтобы четыре полюса ее были действительными и равными  $-2$ .

Желаемый характеристический полином замкнутой системы должен иметь вид

$$\varphi^*(\lambda) = (\lambda + 2)^4 = \lambda^4 + 8\lambda^3 + 24\lambda^2 + 32\lambda + 16.$$

Пусть матрица коэффициентов обратной связи  $\mathbf{K} = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ , тогда характеристический полином замкнутой системы:

$$\varphi(\lambda; \mathbf{K}) = \det(\lambda \mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ k_1 & \lambda + k_2 + 1 & k_3 & k_4 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 0 & -4 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$\varphi(\lambda; \mathbf{K}) = \lambda^4 + (k_2 + 1)\lambda^3 + (k_1 - 4)\lambda^2 - 4(k_2 + k_4 + 1)\lambda - 4(k_1 + k_3).$$

Искомые коэффициенты матрицы обратной связи удовлетворяют уравнениям

$$k_2 + 1 = 8; \quad k_1 - 4 = 24; \quad -4(k_2 + k_4 + 1) = 32; \quad -4(k_1 + k_3) = 16,$$

откуда  $k_1 = 28; \quad k_2 = 7; \quad k_3 = -32; \quad k_4 = -16$ .

Искомое управление стабилизации принимает вид  $u(t) = -28x_1(t) - 7x_2(t) + 32x_3(t) + 16x_4(t)$ . Структура синтезированной системы представлена на рис. 100.

2. Рассматривается общий случай синтеза, когда система имеет векторный вход. Пусть разомкнутая система задана матрицами:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

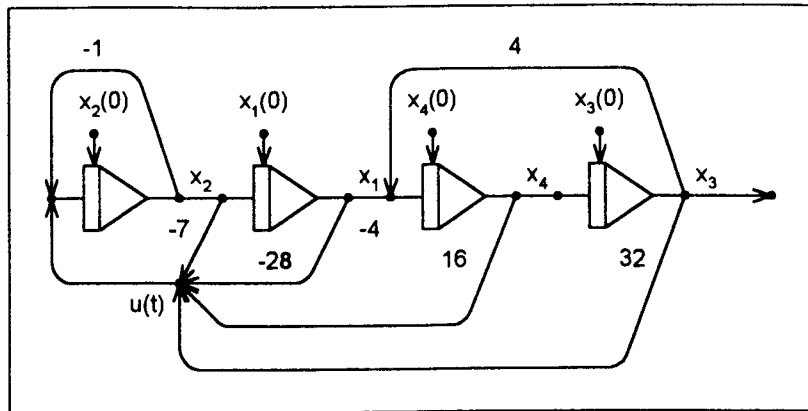


РИС. 100

Осуществим синтез так, чтобы замкнутая система была эквивалентна звену второго порядка с комплексными полюсами:

$$\lambda_{1,2} = -0,3 \pm j0,5.$$

Матрица обратной связи имеет размер  $2 \times 2$  и содержит четыре неизвестных элемента. Характеристический многочлен замкнутой системы:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda; \mathbf{K}) &= \det(\lambda \mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = \\ &= \lambda^2 + \lambda(k_{11} + k_{21} - 0,2k_{12} + 0,8k_{22} + 3) + \\ &+ (k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} + 2k_{11} + 2k_{21} - 0,2k_{12} + 0,8k_{22} + 2). \end{aligned}$$

Желаемый характеристический многочлен замкнутой системы равен

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 0,6\lambda + 0,34,$$

поэтому

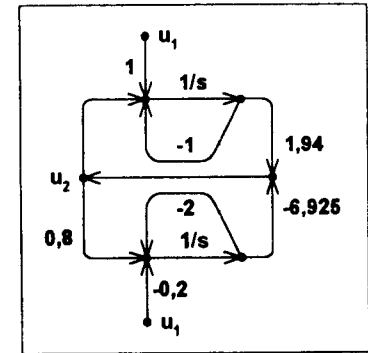
$$\begin{aligned} k_{11} + k_{21} - 0,2k_{12} + 0,8k_{22} + 3 &= -0,6; \\ k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} + 2k_{11} + 2k_{21} - 0,2k_{12} + 0,8k_{22} + 2 &= 0,34. \end{aligned}$$

Имеем два уравнения относительно четырех неизвестных, поэтому два неизвестных могут быть заданы произвольно.

РИС. 101

Например, положим  $k_{12} = k_{11} = 0$ , тогда уравнения относительно оставшихся неизвестных

$$\begin{aligned} k_{21} + 0,8k_{22} &= -3,6; \\ 2k_{21} + 0,8k_{22} &= -1,66 \end{aligned}$$



позволяют определить, что  $k_{21} = 1,94$ ,  $k_{22} = -6,925$ . Искомая структура замкнутой системы стабилизации приведена на рис. 101.

## 11.2. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНОГО ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА

Характерной особенностью решенных задач аналитического синтеза оказывается безусловная возможность достижения цели управления с любым качеством, сколь угодно быстро и притом неоднозначным образом. Эти нереальные возможности возникают потому, что в постановке задачи синтеза нет ограничивающих условий физической реализуемости процесса управления, например нет ограничений на изменение фазовых координат, на управление и энергию движения. В реальных системах, когда имеют место различные ограничения, качество процесса управления также оказывается ограниченным.

Неоднозначность решения задачи синтеза можно исключить, используя неединственность решения как возможность выбора среди различных движений системы *наилучшего движения* в том или ином смысле. Такая постановка задачи, называемая задачей аналитического синтеза оптимальных регуляторов, была сформулирована в 1960 г. А.М. Лётовым.

В качестве критерия качества движения в общем случае используют функционал, который интегрально характеризует качество переходных процессов, величину энергетических затрат на движение и меру финальной близости к цели движения:

$$J(u(t)) = 0,5 \int_0^T [x^T(t)R_1x(t) + u^T(t)R_2u(t)] dt + x^T(T)R_3x(T),$$

где  $R_1, R_2$  — положительные определенные симметрические матрицы;  
 $R_3$  — положительная полуопределенная матрица.

Отметим еще раз, что выражение  $x^T(t)R_1x(t)$  в функционале характеризует текущее отклонение траектории от цели движения, а составляющая

$$\int_0^T [x^T(t)R_1x(t)] dt$$

является интегральной квадратичной оценкой качества переходных процессов.

Задача аналитического синтеза оптимального регулятора состоит в том, чтобы найти для системы

$$\Sigma^{(n)}: \begin{cases} x' = Ax + Bu, & x(0) \\ y = Cx \end{cases}$$

такое управление  $u^*(t)$ , которое переводит систему из состояния  $x(0)$  в состояние покоя за время  $T$  так, что критерий качества движения принимает наименьшее значение:

$$J(x^*(t), u^*(t)) = \min_u J(x(t), u(t)).$$

При этом функции  $x^*(t)$ ,  $u^*(t)$  называют *оптимальной траекторией* и *оптимальным управлением* соответственно.

Решение задачи оптимального синтеза, найденное Лётовым, имеет вид линейной формы от вектора состояния системы  $u(t) = -Kx(t)$ .

Рассмотрим, не ограничивая общность результатов, задачу синтеза оптимального регулятора с критерием качества, не содержащим оценку промаха траектории в конце движения. Для отыскания структуры оптимального регулятора, которая определяется матрицей обратных связей  $K$ , воспользуемся процедурой принципа максимума Л.С. Понтрягина (16.3).

Составим гамильтониан задачи:

$$H(x, u, \psi) = -0,5[x^T R_1 x + u^T R_2 u] + \psi^T (Ax + Bu).$$

Максимум гамильтониана на множестве управлений достигается, когда

$$d/du H(x, u, \psi) = -R_2 u + B^T \psi = 0$$

и  $d^2/du^2 H(x, u, \psi) = -R_2$  является отрицательно определенной, что в данном случае действительно имеет место. Поэтому

$$u^*(t) = R_2^{-1} B^T \psi(t).$$

Вспомогательная переменная  $\psi(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\psi' = -d/dx H(x, u, \psi) = R_1 x - A^T \psi.$$

Подставив управление  $u^*(t)$  в уравнение движения системы, получим вместе с уравнением для вспомогательной переменной систему линейных однородных дифференциальных уравнений порядка  $2n$ :

$$\begin{cases} x' = Ax + BR_2^{-1} B^T \psi; \\ \psi' = R_1 x - A^T \psi \end{cases}$$

с двумя граничными условиями:  $x(0), \psi(T) = 0$ ; последнее носит название *условия трансверсальности* (см. разд. 16.3). Это условие определяется выбранным критерием оптимальности.

Лётов показал, что вектор состояния системы и вспомогательный вектор линейно связаны:

$$\psi(t) = -P(t)x(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $P(t)$  — матрица переменных коэффициентов, которые зависят не только от текущего, но и от конечного времени  $T$ , однако не зависят от начальных условий  $x(0)$ .

Знание матрицы  $P(t)$  завершит синтез регулятора.

Чтобы найти матрицу  $P(t)$ , продифференцируем по  $t$  линейное соотношение между вектором состояния системы и вспо-

могательным вектором, затем, воспользовавшись известными дифференциальными уравнениями для этих переменных, получим соотношение, справедливое для всех  $t \geq 0$ :

$$R_1 \dot{x} + A^T P x = -P'x - P(Ax - BR_2^{-1} B^T P x).$$

Из этого соотношения следует, что искомая матрица  $P(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка:

$$P' + PA + A^T P - PBR_2^{-1} B^T P + R_1 = 0,$$

которое классифицируется как уравнение типа Риккати. Для этого уравнения очевидно граничное условие  $P(T) = 0$ .

Матрица  $P(t)$  симметрическая, поскольку транспонированная к ней матрица также удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати с тем же граничным условием и поэтому в силу единственности решения совпадает с  $P(t)$ .

Матричное уравнение Риккати представляет собой систему  $n(n+1)/2$  дифференциальных уравнений первого порядка с переменными параметрами, решение которых ищут численными методами. Найденное решение  $P(t)$  позволяет определить единственно искомое оптимальное управление:

$$u^*(t) = -R_2^{-1} B^T P(t)x(t),$$

которое оказывается линейным относительно вектора состояния системы. Матрица коэффициентов обратных связей:

$$K(t) = R_2^{-1} B^T P(t).$$

В том случае, когда для линейной стационарной системы выбран критерий качества с постоянными матрицами  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и, кроме того, время движения достаточно велико, матрица  $P(t)$  оказывается постоянной, симметрической и положительно определенной. Эта матрица удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$PA + A^T P - PBR_2^{-1} B^T P + R_1 = 0.$$

Структура оптимального регулятора в этом случае определяется постоянной матрицей коэффициентов обратных связей:

$$K = R_2^{-1} B^T P.$$

Движение замкнутой системы с найденным линейным оптимальным регулятором описывается матричным линейным однородным дифференциальным уравнением:

$$x' = (A - BK)x, \quad x(0).$$

Это движение оказывается асимптотически устойчивым.

### Пример

Для системы стабилизации положения, модель которой задается матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,8 \end{pmatrix},$$

выполним синтез регулятора так, чтобы критерий качества управления

$$J = 0,5 \int_0^T [x_1^2(t) + 100u^2(t)] dt$$

принимал наименьшее значение на траектории движения системы из произвольного начального состояния в положение покоя — начало координат.

Искомая матрица  $P$ , определяющая структуру регулятора, удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению

$$P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} P - (0,01) P \begin{pmatrix} 0 \\ 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0,8 \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Это уравнение в скалярной форме принимает вид

$$1 - 64p_{12}^2 = 0;$$

$$64p_{12}p_{22} - p_{11} + 5p_{12} = 0;$$

$$64p_{22}^2 - 2p_{12} + 10p_{22} = 0.$$

Из этих уравнений с учетом свойств матрицы  $P$  находим, что

$$p_{11} = 0,8; \quad p_{12} = p_{21} = 0,125; \quad p_{22} = 0,022.$$

Затем находим матрицу обратных связей:  $K = 0,01B^T P = (1 \ 0,175)$  и оптимальное управление:

$$u^*(t) = -x_1(t) - 0,175x_2(t).$$

После замыкания система будет иметь характеристический многочлен:

$$\det(\lambda E - (A - BK)) = \lambda^2 + 0,14\lambda + 0,8,$$

а значит, полюса замкнутой системы располагаются в точках  $\lambda_{1,2} = -0,7 \pm j0,56$ , что обеспечивает асимптотическую устойчивость. Качество переходного процесса стабилизации оценивается двумя показателями: временем регулирования не более 4,3 с и перерегулированием, которое составило величину порядка 2 %.

### 11.3. НАБЛЮДАТЕЛИ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Решая задачу синтеза, мы предполагали, что все координаты состояния доступны для измерения, в реальности такое предположение чаще всего невыполнимо. Обычно доступна для измерения лишь линейная комбинация переменных состояния  $y = Cx$ .

**Задача восстановления** координат состояния системы состоит в том, чтобы найти **оценки вектора состояния**  $\underline{x}$  по результатам измерения переменной  $y(t)$ .

Рассматривается линейная система:

$$\Sigma^{(n)}: \quad \begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned}$$

**Определение.** Система  $\underline{x}'(t) = F\underline{x}(t) + G\underline{y}(t) + Nu(t)$  называется **асимптотическим наблюдателем** полного порядка для системы  $\Sigma^{(n)}$ , если для любого начального состояния  $x(0)$  и для всех  $u(t)$ ,  $t \geq 0$  оценка  $\underline{x}(t)$  с ростом времени асимптотически приближается к вектору состояния  $x(t)$ .

Найдем структуру асимптотического наблюдателя, для чего определим ошибку восстановления  $x(t) - \underline{x}(t)$  и найдем модель ее изменения:

$$(x(t) - \underline{x}(t))' = (A - GC)x(t) - F\underline{x}(t) + (B - N)u(t),$$

а затем потребуем, чтобы  $x(t) = \underline{x}(t)$  при всех  $u(t)$ ,  $t \geq 0$  и  $x(0) = \underline{x}(0)$ . Это равенство возможно, когда  $F = (A - GC)$ ,  $N = B$ .

Таким образом, структура асимптотического наблюдателя полного порядка для линейной системы  $\Sigma^{(n)}$ :  $(A, B, C)$  определяется моделью вида

$$\underline{x}'(t) = (A - GC)\underline{x}(t) + G\underline{y}(t) + Bu(t), \quad \underline{x}(0) = 0.$$

На рис. 102 изображена структура системы и ее наблюдателя.

Задача синтеза наблюдателя системы состоит в том, чтобы найти матрицу  $G$ . Это возможно сделать, исходя из условия асимптотической сходимости оценки  $\underline{x}(t)$  к вектору состояния  $x(t)$  при любых начальных состояниях наблюдателя и системы. Действительно, пусть ошибка восстановления  $x(t) - \underline{x}(t) = \delta(t)$ , тогда:

$$\begin{aligned} \delta'(t) &= (Ax(t) + Bu(t)) - ((A - GC)\underline{x}(t) + G\underline{y}(t) + Bu(t)) = \\ &= (A - GC)\delta(t), \quad \delta(0) = x(0). \end{aligned}$$

Ошибка восстановления описывается линейным однородным дифференциальным уравнением с матрицей  $A - GC$  и ненулевыми начальными условиями, а поэтому асимптотическая сходимость ошибки к нулю возможна тогда и только тогда, когда собственные числа матрицы  $A - GC$ , которые называют **полюсами наблюдателя**, располагаются в левой полуплоскости.

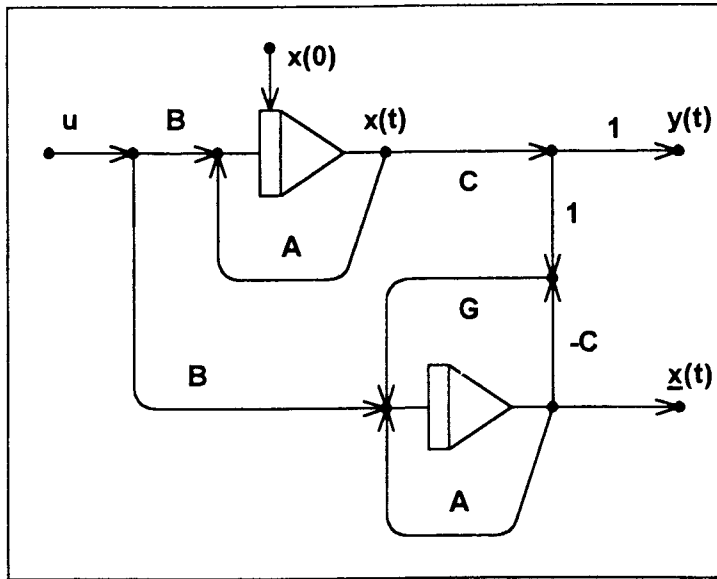


РИС. 102

Задача синтеза наблюдателя полного порядка для линейной системы имеет свое решение, когда эта система вполне наблюдаема.

### Теорема

*Характеристические числа асимптотического наблюдателя системы могут быть произвольно размещены на комплексной плоскости путем соответствующего выбора матрицы  $G$  тогда и только тогда, когда система вполне наблюдаема.*

Для доказательства этого утверждения воспользуемся доказанной выше теоремой о синтезе регулятора.

Известно, что собственные числа матриц  $A$ ,  $A^T$  совпадают, следовательно, матрицы  $A - GC$  и  $(A - GC)^T$  имеют одни и те же собственные числа. По теореме о синтезе регулятора для свободного выбора собственных чисел матрицы  $A - BK$  требуется лишь управляемость пары  $(A, B)$ . Применим эту теорему к паре  $(A^T, C^T)$ . Если пара  $(A^T, C^T)$  вполне управляема, то свобод-

ный выбор собственных чисел матрицы  $A^T - C^T G^T = (A - GC)^T$ , а с ней и матрицы  $A - GC$  возможен. Но в силу теоремы Калмана о двойственности свойств управляемости и наблюдаемости пара  $(A^T, C^T)$  вполне управляема тогда и только тогда, когда пара  $(A, C)$  вполне наблюдаема.

Структура наблюдателя полного порядка очевидно избыточна, в ней определяются и те координаты состояния, которые доступны для измерения. Асимптотические наблюдатели линейной системы, в которых вычисляются только неизмеряемые координаты состояния системы, называют *наблюдателями Люинбергера* (D.G. Luenberger, 1968).

Пусть по-прежнему рассматривается линейная система  $n$ -го порядка, у которой вектор выхода  $y$  имеет  $m$  измеряемых координат:

$$\Sigma^{(n)}: \begin{cases} x' = Ax + Bu, & x(0), \\ y = Cx. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение вспомогательный вектор  $r$  размерностью  $(n - m)$  и матрицу  $D$  так, чтобы  $r = Dx$  и квадратная матрица  $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$  была бы невырожденной.

Тогда вектор состояния системы может быть представлен в виде

$$x = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу в этом выражении запишем в блочном виде  $(L_1; L_2)$ , тогда выражение для вектора состояния оказывается более простым:

$$x(t) = L_1 y(t) + L_2 r(t).$$

Предположим, что наблюдатель для вектора  $r(t)$  синтезирован, тогда искомым наблюдателем для вектора состояния системы однозначно определяется:

$$\hat{x}(t) = L_1 y(t) + L_2 \hat{r}(t).$$

Найдем структуру наблюдателя для вспомогательного вектора  $r(t)$ . Производная по времени этого вектора удовлетворяет соотношению

$$r' = Dx' = D(Ax + Bu) = DAL_1 y + DAL_2 r + DBu.$$

На этом основании составим модель наблюдателя вспомогательного вектора  $r(t)$  в виде

$$r' = DAL_1 y + DAL_2 r + DBu + G(y - Cx).$$

Найдем в этом уравнении выражение для производной от  $(y - Cx)$ :

$$\begin{aligned} (y - Cx)' &= y' - Cx' = y' - C(Ax + Bu) = \\ &= y' - CAL_1 y - CAL_2 r - CBu. \end{aligned}$$

Подставим это выражение в модель наблюдателя вспомогательного вектора и выполним алгебраические преобразования:

$$\begin{aligned} r' - Gy' &= (DAL_2 - GCAL_2)(r - Gy) + \\ &+ (DAL_1 + DAL_2 G - GCA L_1 - GCAL_2 G)y + (DB - GCB)u. \end{aligned}$$

Обозначив  $r - Gy = z$ , получим дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями для новой вспомогательной переменной:

$$z' = (D - GC)(AL_2 z + (AL_1 + AL_2 G)y + Bu), \quad z(0) = 0.$$

Теперь искомые асимптотические оценки вектора состояния системы могут быть вычислены из соотношения

$$\underline{x}(t) = L_1 y(t) + L_2 (z + Gy) = L_2 z + (L_1 + L_2 G)y(t).$$

Структура наблюдателя Люинбергера для вектора состояния системы определяется моделью вспомогательной переменной  $z$ , порядок которой равен  $(n - m)$ , и соотношением для  $\underline{x}$ . Матрица  $G$  в наблюдателе свободна в выборе и подбирается так, чтобы обеспечить качество динамического процесса восстановления координат состояния.

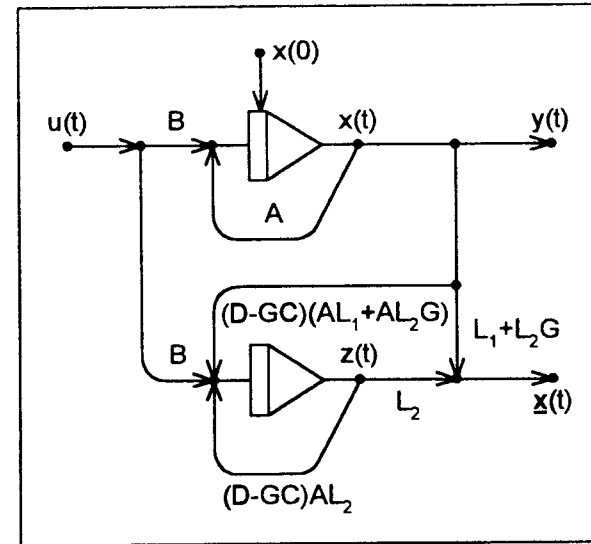


РИС. 103

Наблюдатели неполного порядка Люинбергера оказываются менее чувствительными к помехам, нежели наблюдатели полного порядка (рис. 103).

### Примеры

1. Пусть в системе управления положением

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,8 \end{pmatrix} u(t), \quad x(0)$$

измеряется лишь переменная  $y = x_1$ . Построим асимптотический наблюдатель второго порядка, восстанавливающий оценки координат  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ .

Пусть матрица  $G = (g_1, g_2)^T$ , тогда матрица

$$A - GC = \begin{pmatrix} -g_1 & 1 \\ -g_2 & 5 \end{pmatrix}.$$



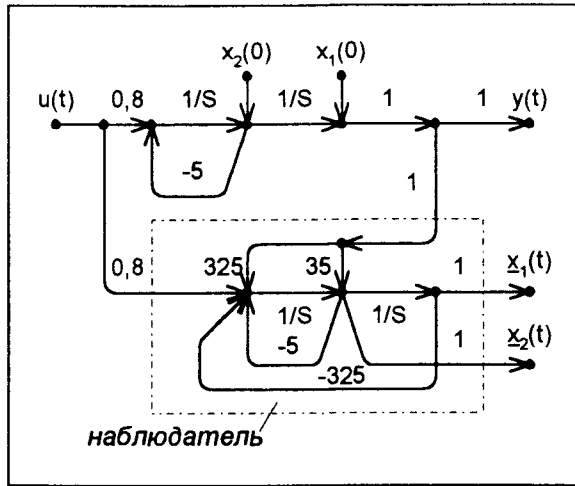


РИС. 104

Полюса наблюдателя определяются уравнением

$$\det(\lambda E - A + GC) = \lambda^2 + (5 + g_1)\lambda + (5g_1 + g_2) = 0.$$

Переходные процессы в наблюдателе будут несравнимы с процессами в системе, если полюса наблюдателя будут значительно левее полюсов системы. Поскольку характеристические числа системы действительные и равные  $\{0, -5\}$ , то расположим полюса наблюдателя в точках  $\{-20 \pm j10\}$ . Желаемый характеристический полином наблюдателя принимает вид  $\lambda^2 + 40\lambda + 500$ , что будет иметь место тогда, когда  $g_1 = 35$ ,  $g_2 = 325$ . Модель асимптотического наблюдателя системы принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -35(x_1(t) - y(t)) + x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -325(x_1(t) - y(t)) - 5x_2(t) + 0,8u(t); \\ x_1(0) &= x_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Структура системы со своим асимптотическим наблюдателем полного порядка представлена на рис. 104.

2. В условиях предыдущего примера синтезируем структуру асимптотического наблюдателя Люинбергера первого порядка.

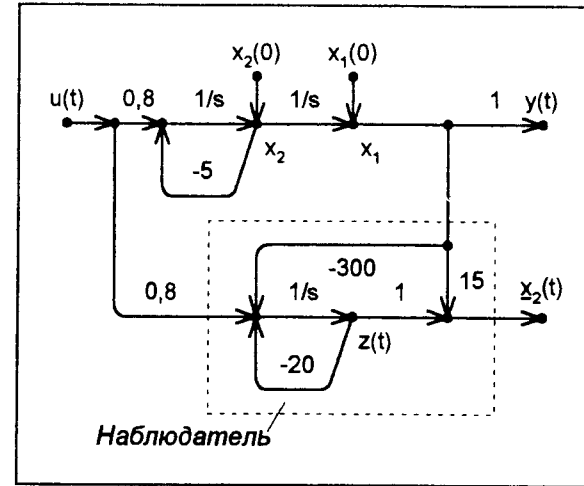


РИС. 105

Выберем матрицу  $D$  так, чтобы матрица  $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$  оказалась единичной, тогда матрицы  $L_1, L_2$  примут вид

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $G$  при этом оказывается скалярной:  $G = g$ , поэтому  $(D - GC) = (-g, 1)$ . Теперь дифференциальное уравнение для вспомогательной переменной  $z$  и соотношение для оценки координат вектора состояния принимают вид

$$\begin{aligned} z' &= -(g + 5)z - g(g + 5)y + 0,8u, \quad z(0) = 0; \\ \underline{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ g \end{pmatrix} y. \end{aligned}$$

Величину  $g$  выберем из условия: полюс наблюдателя должен быть значительно левее полюсов системы. Полюс наблюдателя равен  $-(g + 5)$ , а полюса системы  $\{0, -5\}$ , поэтому выбираем, например, полюс наблюдателя в точке  $-20$ . Значит,  $g = 15$ . Окончательно структура синтезированного наблюдателя Люинбергера описывается уравнениями

$$\underline{x}_2(t) = z(t) + 15y(t);$$

$$z'(t) = -20z(t) - 300y(t) + 0,8u(t), \quad z(0) = 0.$$

На рис. 105 изображена структура этого наблюдателя.

## 11.4. СИНТЕЗ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ С НАБЛЮДАТЕЛЕМ СОСТОЯНИЯ

Структура регулятора замкнутой системы управления, у которой не все координаты состояния измеряются, содержит наблюдатель состояния, в котором восстанавливаются недостающие координаты вектора состояния, и устройство формирования закона управления в виде линейной формы от восстановленного вектора состояния системы. Модель такой замкнутой системы представляется в виде объединения двух моделей: модели разомкнутой системы и модели наблюдателя с формирователем управления:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0);$$

$$y(t) = Cx(t);$$

$$\dot{\underline{x}}(t) = (A - GC)\underline{x}(t) + Gy(t) + Bu(t), \quad \underline{x}(0) = 0;$$

$$u(t) = -K\underline{x}(t).$$

Изучим свойства такой системы, для чего упростим ее модель исключением из ее описания управления  $u(t)$  и выхода  $y(t)$  как внутренних переменных:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK\underline{x}(t), \quad x(0);$$

$$\dot{\underline{x}}(t) = GCx(t) + (A - GC) - BK\underline{x}(t), \quad \underline{x}(0) = 0.$$

Порядок такой замкнутой системы равен  $2n$ , вектор состояния состоит из пары  $x(t)$ ,  $\underline{x}(t)$ , а матрица состояния имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & -BK \\ GC & (A - GC - BK) \end{pmatrix}.$$

Ошибка восстановления вектора состояния в этой системе,  $x(t) - \underline{x}(t) = \delta(t)$ , описывается однородным уравнением

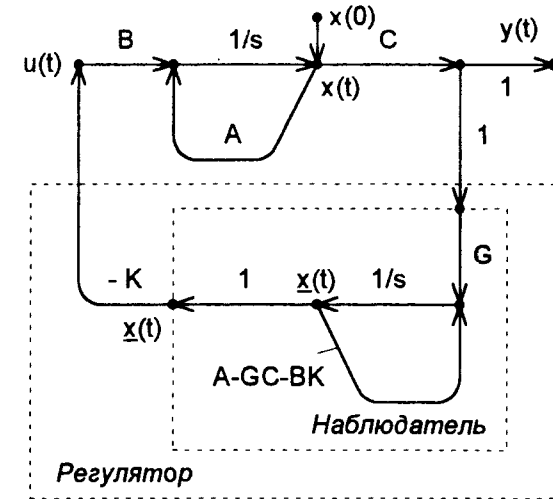


РИС. 106

$$\delta'(t) = (A - GC)\delta(t),$$

которое можно сделать асимптотически устойчивым соответствующим подбором матрицы  $G$ . Рассмотрим в качестве вектора состояния замкнутой системы пару  $x(t)$ ,  $\delta(t)$ , тогда модель системы в новых координатах принимает вид

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BK \delta(t), \quad x(0);$$

$$\delta'(t) = (A - GC)\delta(t), \quad \delta(0) = x(0).$$

Матрица состояния такой системы:

$$\begin{pmatrix} (A - BK) & BK \\ 0 & (A - GC) \end{pmatrix},$$

поэтому характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$\det(\lambda E - A + BK)\det(\lambda E - A + GC) = 0.$$

Значит, спектр характеристических чисел замкнутой вполне управляемой и вполне наблюдаемой системы есть множественное объединение полюсов регулятора и полюсов наблюдателя.

ля. Причем первые могут быть произвольно расположены на комплексной плоскости путем соответствующего подбора матрицы  $\mathbf{K}$ , а вторые — могут быть произвольно расположены на комплексной плоскости путем соответствующего подбора матрицы  $\mathbf{G}$ . Мы показали, что асимптотически устойчивый регулятор и асимптотически устойчивый наблюдатель обеспечивают асимптотическую устойчивость замкнутой системы управления.

На рис. 106 изображена структура замкнутой системы с наблюдателем в регуляторе.

### Пример

Выполним синтез замкнутой системы стабилизации, у которой разомкнутая часть описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -5x_2(t) + 0,6u(t) \end{aligned}$$

и у которой может быть измерена лишь координата  $x_1(t)$ .

Характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = \lambda^2 + (5 + 0,6k_2)\lambda + 0,6k_1 = 0,$$

потому что

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,6 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = (k_1 \quad k_2).$$

Собственные числа объекта управления — два действительных числа  $\{0, -5\}$ , поэтому потребуем, чтобы полюса регулятора были расположены в точках  $\{-15 \pm j8\}$ , а значит, желаемый характеристический полином будет иметь вид  $\lambda^2 + 30\lambda + 289$ , что возможно, когда  $k_1 = 481,7$ ,  $k_2 = 41,7$ .

Характеристическое уравнение наблюдателя полного порядка имеет вид

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{GC}) = \lambda^2 + (5 + g_1)\lambda + (5g_1 + g_2) = 0,$$

потому что  $\mathbf{G} = (g_1, g_2)^T$ ,  $\mathbf{C} = (1, 0)$ .

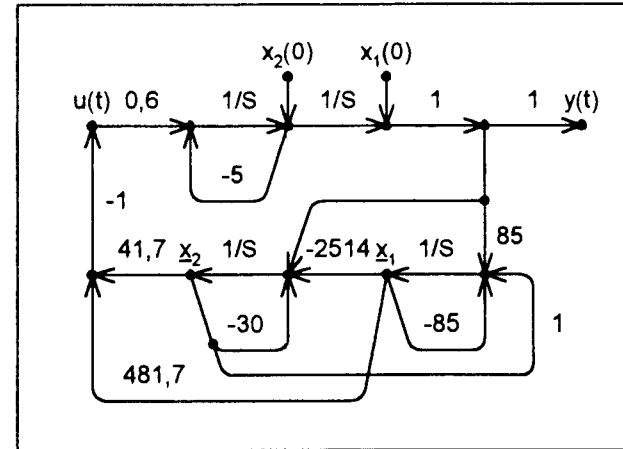


РИС. 107

Потребуем, чтобы полюса наблюдателя были расположены еще левее, чем у регулятора, в точках  $\{-45 \pm j25\}$ , а значит, желаемый характеристический полином будет иметь вид  $\lambda^2 + 90\lambda + 2650$ , что возможно, когда  $g_1 = 85$ ,  $g_2 = 2225$ .

Структура синтезированной системы изображена на рис. 107.

## 11.5. УПРАЖНЕНИЯ

### 1. Для объекта управления

$$\dot{x}' = \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ -0,2 & -0,25 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -0,5 & 0,8 \end{pmatrix} u(t)$$

найти структуру линейного регулятора, с которым замкнутая система управления имела бы полюса, расположенные в точках  $\{-0,4 \pm j0,75\}$ .

2. Линейная система второго порядка обладает парой действительных собственных чисел. Осуществить синтез замкнутой системы так, чтобы после замыкания эта система генерировала гармонические колебания фиксированной частоты.

3. Объект управления описывается линейной моделью, которая задается тремя матрицами:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \mathbf{E}.$$

Выполнить синтез замкнутой системы так, чтобы после замыкания передаточная функция системы имела вид

$$2(s+2)/(s^3+4s^2+6s+4).$$

4. Осуществить для системы  $\Sigma^{(n)}$ :  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  синтез линейного регулятора, оптимального в смысле

$$J = 0,5 \int_0^T [\mathbf{x}^T(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + Ru^2(t)] dt, \quad T \rightarrow \infty,$$

если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad R = \{0,4; 1; 10\}.$$

5. Определить структуру асимптотического наблюдателя полного порядка для системы:

а) заданной передаточной функцией:

$$W(s) = 3/(s^2 + 5s + 4);$$

б) заданной матрицами:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Осуществить синтез наблюдателя Люинбергера для системы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = (2 \ 0 \ 1).$$

7. Объект управления описывается уравнением первого порядка:

$$y'(t) + ay(t) = bu(t),$$

где  $a, b$  — параметры.

Необходимо синтезировать систему стабилизации этого объекта в положении покоя, оценивая процесс управления по критерию, минимизация которого должна сделать процесс стабилизации близким к нулю с малыми энергетическими затратами, для чего можно использовать критерий:

$$0,5 \int_0^T [y^2(t) + r_2 u^2(t)] dt + r_3 y^2(T), \quad r_2 > 0; \quad r_3 \geq 0.$$

Убедиться в том, что управление стабилизации имеет вид

$$u^*(t) = -(b/r_2)P(t)y(t),$$

где  $P(t)$  удовлетворяет уравнению Риккати вида

$$P'(t) = 2aP(t) + (b^2/r_2)P^2(t) - 1, \quad P(T) = r_3.$$

8. Пусть в условиях задачи 7 время стабилизации не ограничено, выполнить синтез оптимального регулятора, стабилизирующего состояние объекта в положении покоя. Определить, где расположены полюса замкнутой системы стабилизации, дать суждение об устойчивости системы в зависимости от параметров  $r_2, r_3$ .

9. Для объекта, который задается матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = (1 \ 0),$$

определить структуру регулятора, оптимального в смысле критерия:

$$0,5 \int_0^T [y^2(t) + r_2 u^2(t)] dt, \quad T \rightarrow \infty; \quad r_2 > 0.$$

Построить наблюдатель полного порядка и использовать оценку вектора состояния для синтеза регулятора. Исследовать реакцию замкнутой системы на начальные условия и изменение параметра в критерии качества.

10. Объект до замыкания имел передаточную функцию  $W(s) = 10/(s^2 + 5s + 6)$ , после замыкания требуется иметь передаточную функцию системы, равную

$$H(s) = 40/((s + 2)(s + 5)(s + 9)).$$

Осуществить синтез замкнутой системы с использованием оценок наблюдателя. Определить моделированием реакцию замкнутой системы на начальное отклонение системы от ее положения равновесия. Проверить условия асимптотической устойчивости замкнутой системы.

# 12 СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

---

*Синтез системы с последовательно включенным регулятором — Синтез системы с заданным расположением полюсов — Цифровые наблюдатели состояния системы — Упражнения.*

## 12.1. СИНТЕЗ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ВКЛЮЧЕННЫМ РЕГУЛЯТОРОМ

Структура цифровой системы управления может включать аналоговый или цифровой регулятор в прямой цепи или цепи обратной связи. На рис. 108, а изображена замкнутая цифровая система с последовательно включенным аналоговым регулятором, перед которым расположены фиксатор нулевого порядка и импульсный прерыватель.

Целью синтеза является определение передаточной функции  $W_p(s)$  непрерывного регулятора, с которым замкнутая цифровая система будет обладать заданными показателями качества переходных процессов.

Для решения задачи синтеза системы с аналоговым регулятором можно использовать два альтернативных подхода: по первому выполняют аналоговую аппроксимацию цифровой части системы, а затем для полностью непрерывной системы решают задачу синтеза известными методами, которые разработаны для непрерывных систем управления. По второму подходу предполагается получение дискретной модели аналоговой части и затем для полностью цифровой системы используют специальные дискретные методы синтеза.

Аналоговая аппроксимация цифровой части системы — импульсного прерывателя и фиксатора нулевого порядка, кото-

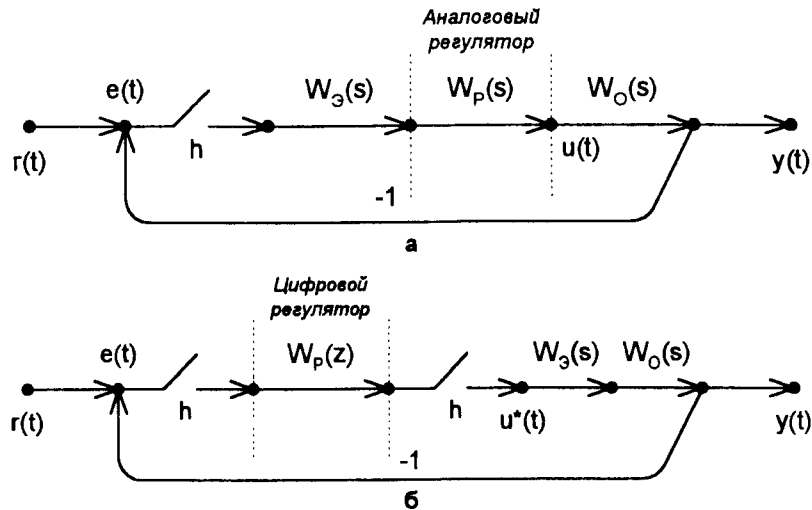


РИС. 108

рые выполняют функцию "выборки и хранения", представляется при достаточно малом периоде квантования звеном чистого запаздывания на половину периода квантования. Передаточная функция прямого тракта эквивалентной непрерывной системы принимает вид

$$W_p(s)W_o(s)e^{-0,5sh}$$

Дискретная аппроксимация непрерывной части системы может быть выполнена с использованием Z-преобразования или прямого алгебраического метода дискретизации. В первом случае соответствующая  $W(s)$  импульсная передаточная функция  $W(z)$  может быть найдена по таблицам соответствия или путем последовательного перехода от  $W(s)$  к внутренней непрерывной модели и последующей аналитической дискретизации этой модели.

Алгебраические методы дискретизации непрерывной части системы используют конечно-разностные алгоритмы аппроксимации. Известно, что переменные преобразования Лапласа и Z-преобразования связаны соотношением  $z = e^{sh}$ , поэтому различные аппроксимации экспоненты в окрестности нуля порожда-

ют различные конечно-разностные алгоритмы дискретизации непрерывной модели.

Так, например, разложение экспоненты в степенной ряд  $e^{sh} \cong 1 + sh$  порождает **алгоритм Эйлера**, или **алгоритм прямой разности**:

$$s \cong h^{-1}(z - 1);$$

представление  $e^{sh} \cong 1/(1 - sh)$  порождает **алгоритм обратной разности**:

$$s \cong (zh)^{-1}(z - 1),$$

представление  $e^{sh} \cong (1 + 0,5sh)/(1 - 0,5sh)$  порождает **алгоритм Тустена**:

$$s \cong 2h^{-1}(z - 1)/(z + 1).$$

Теперь для дискретизации непрерывной модели достаточно заменить переменную  $s$  в выражении передаточной функции  $W(s)$  на правую часть алгоритма, чтобы получить выражение импульсной передаточной функции  $W(z)$ .

Заметим, что алгоритм дискретизации Тустена осуществляет конформное отображение комплексной левой  $s$ -полуплоскости в единичный круг комплексной  $z$ -плоскости. Другие алгоритмы этим свойством не обладают. Алгоритм Эйлера, например, отображает левую  $s$ -полуплоскость в полуплоскость  $\text{Re } z < 1$ , поэтому модель устойчивой непрерывной системы при такой аппроксимации может не сохранить этого свойства в дискретизированном представлении.

На рис. 108, б представлена система, которая имеет в прямой цепи цифровой регулятор, импульсные прерыватели и фиксатор. Функцию цифрового регулятора можно реализовать, используя, например, микропроцессорный контроллер, что позволяет добиваться лучшего по сравнению с аналоговыми регуляторами качества переходных процессов в системе. При синтезе дискретных систем чаще всего используются универсальные цифровые ПИД-регуляторы, реализующие одновременно пропорциональный, интегральный и дифференциальный законы регулирования. В непрерывной интерпретации ПИД-регулятор описывается передаточной функцией:

$$W_p(s) = K_p(1 + 1/(T_I s) + T_D s),$$

где параметры  $K_p$ ,  $T_I$ ,  $T_D$  — пропорциональное усиление, постоянная интегрирования и постоянная дифференцирования соответственно.

Дискретное представление ПИД-регулятора можно получить, используя разностные алгоритмы. Часто интегральную составляющую аппроксимируют по алгоритму Эйлера, а дифференциальную — по алгоритму обратной разности. В этом случае импульсная передаточная функция регулятора принимает вид

$$W_p(z) = K_p(1 + h/(T_I(z - 1))) + T_D(z - 1)/(hz).$$

Выполнив аппроксимацию интегральной составляющей по алгоритму Тустена, а дифференциальную — по Эйлера, получим выражение для выходного сигнала регулятора:

$$u(k) = K_p(e(k) + h/T_I(0,5(e(0) + e(k)) + \sum_{i=1}^{k-1} e(i)) + T_D/h(e(k) - e(k - 1))).$$

Очевидный недостаток этой формулы состоит в том, что она не рекуррентна, для ее вычисления необходимо помнить на момент  $k$  все значения входного сигнала  $e(i)$ ,  $i = 1, \dots, k - 1$ . Придать этой формуле рекуррентный вид можно, вычисляя изменение управляющего сигнала  $u(k) - u(k - 1)$ ,

$$\text{где } u(k - 1) = K_p(e(k - 1) + h/T_I(0,5(e(0) + e(k - 1)) + \sum_{i=1}^{k-2} e(i)) + T_D/h(e(k - 1) - e(k - 2))).$$

Получим

$$u(k) - u(k - 1) = K_p(e(k) - 2e(k - 1) + h/T_I(0,5(e(k) + e(k - 1)) + T_D/h(e(k) - 2e(k - 1) + e(k - 2))),$$

откуда находим искомую рекуррентную форму представления выходного сигнала ПИД-регулятора:

$$u(k) = u(k - 1) + b_1 e(k) + b_2 e(k - 1) + b_3 e(k - 2),$$

$$\begin{aligned} \text{где } b_1 &= K_p(1 + 0,5h/T_I + T_D/h); \\ b_2 &= -K_p(1 - 0,5h/T_I + 2T_D/h); \\ b_3 &= K_p T_D/h. \end{aligned}$$

Синтез системы с цифровым ПИД-регулятором сводится к определению параметров  $K_p$ ,  $T_I$ ,  $T_D$  регулятора или коэффициентов  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  алгоритма вычисления управляющего ПИД-сигнала, которые обеспечивают заданные показатели качества системы.

### Пример

Пусть непрерывная часть проектируемой цифровой системы (рис. 108, б) имеет передаточную функцию:

$$W_0(s) = 5/((s + 1)(0,5s + 1)).$$

Импульсные прерыватели работают синхронно с периодом квантования  $h = 0,1$  с. Необходимо синтезировать замкнутую цифровую систему для обработки линейно растущего сигнала так, чтобы коэффициент ошибки по скорости был не более 5 ед. В разомкнутом состоянии система без коррекции имеет импульсную передаточную функцию:

$$W_0(z)W_0(z) = (z - 1)/z \mathcal{Z}[W_0(s)/s] = 0,045(z + 0,9)/((z - 0,9)(z - 0,82)),$$

поэтому после замыкания этой системы ее характеристический многочлен принимает вид  $\lambda^2 - 1,68\lambda + 0,78$ . Корни этого многочлена  $\lambda_{1,2} = 0,84 \pm j0,28$  лежат внутри единичного круга, поэтому система будет устойчивой.

Однако установившаяся ошибка обработки единичного задания не равна нулю. Действительно,

$$e^* = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})(1 - H(z)) \mathcal{Z}^{-1} 1(t) = (1 - H(1)) = 0,16.$$

Здесь  $H(z) = 0,045(z + 0,9)/(z^2 - 1,68z + 0,78)$ .

Поэтому в системе необходима коррекция, которую можно выполнить, используя ПИ или ПИД-регуляторы.

Рассмотрим случай использования ПИД-регулятора с передаточной функцией:

$$W_D(z) = K_p + K_i(z+1)/(z-1) + K_D(z-1)/z,$$

в котором

$$K_i = 0,05K_p/T_i; \quad K_D = 10K_pT_D.$$

Передаточная функция разомкнутой системы с ПИД-регулятором будет иметь вид

$$W(z) = 0,045(z+0,9)((K_p + K_i + K_D)z^2 + (K_i - K_p - 2K_D)z + K_D)/(z(z-1)(z-0,9)(z-0,82)),$$

но тогда передаточная функция замкнутой системы по ошибке оказывается равной

$$H_e(z) = 1/(1+W(z)) = z(z-1)(z-0,9)(z-0,82)/((z(z-1)(z-0,9)(z-0,82) + 0,045(z+0,9)((K_p + K_i + K_D)z^2 + (K_i - K_p - 2K_D)z + K_D)).$$

Из этого выражения определим коэффициенты ошибки, в частности ошибки по положению и по скорости:

$$c_0 = H_e(1) = 0;$$

$$c_1 = \lim_{z \rightarrow 1} h^{-1}(z-1)W(z) = \lim_{z \rightarrow 1} [0,45(z+0,9)((K_p + K_i + K_D)z^2 + (K_i - K_p - 2K_D)z + K_D)/(z(z-0,9)(z-0,82))] = 95,6K_i.$$

Располагая величиной допустимой ошибки по скорости, можно найти значение параметра  $K_i = 0,052$  ПИД-регулятора. Два других параметра можно определить из условия компенсации двух полюсов передаточной функции объекта управления двумя нулями передаточной функции регулятора:

$$z^2 + z(K_i - K_p - 2K_D)/(K_p + K_i + K_D) + K_D/(K_p + K_i + K_D) = (z-0,9)(z-0,82),$$

РИС. 109

что возможно, если

$$(K_i - K_p - 2K_D)/(K_p + K_i + K_D) = -1,72;$$

$$K_D/(K_p + K_i + K_D) = 0,738.$$

Откуда получим значения параметров ПИД-регулятора:

$$K_D = 82, \quad 3K_i = 4,3; \quad K_p = 28, \quad 2K_i = 1,5.$$

После настройки ПИД-регулятора по найденным параметрам передаточная функция разомкнутой системы принимает вид

$$W(z) = 0,26(z+0,9)/(z(z-1)).$$

Характеристическое уравнение синтезированной замкнутой цифровой системы  $\lambda^2 - 0,74\lambda + 0,23 = 0$  имеет корни  $\lambda_{1,2} = 0,38 \pm j0,29$ , что обеспечивает асимптотическую устойчивость системы и заданное качество переходного процесса.

На рис. 109 приведены результаты моделирования трех переходных процессов:

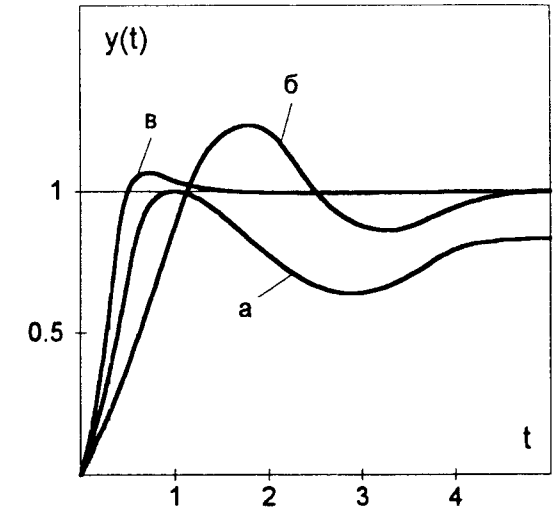
а — в системе без регулятора;

б — с ПИД-регулятором, для которого  $K_p = 0,5; K_i = 0,02;$

$K_D = 0;$

в — с ПИД-регулятором, для которого  $K_p = 1,5; K_i = 0,052;$

$K_D = 4,3.$





## 12.2. СИНТЕЗ СИСТЕМЫ С ЗАДАНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ПОЛЮСОВ

Рассмотрим линейную вполне управляемую систему с одним входом, в которой доступен для измерения весь вектор состояния:

$$\Sigma^{(n)}: \begin{cases} x(k+1) = Mx(k) + Nu(k), & x(0) = h, \\ y(k) = Ex(k). \end{cases}$$

Задача аналитического синтеза состоит в том, чтобы определить структуру и параметры регулятора системы, который позволит переводить состояние системы из произвольного начального  $x(0)$  в начало координат с заданным качеством переходных процессов. Последнее означает, что после замыкания система должна обладать заданным спектром собственных чисел.

Для решения задачи синтеза используется линейная обратная связь по состоянию системы:

$$u(k) = -Sx(k).$$

После замыкания модель движения системы принимает вид

$$x(k+1) = (M - NS)x(k).$$

Характеристический многочлен такой системы:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda E - (M - NS)).$$

Заданное расположение полюсов замкнутой системы определяет желаемый характеристический многочлен  $\varphi^*(\lambda)$ , поэтому для выполнения основного условия синтеза необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\varphi(\lambda) = \varphi^*(\lambda).$$

Это равенство двух многочленов позволяет найти неизвестные элементы матрицы обратных связей  $S$  путем решения

соответствующих уравнений или, в общем случае, используя формулу Акермана [10]:

$$S = (0 \dots 0 \ 1) R^{-1} \varphi^*(M),$$

где  $R = (N : MN : \dots : M^{n-1}N)$  — квадратная  $n \times n$  матрица управляемости разомкнутой системы;  
 $\varphi^*(M) = \varphi^*(\lambda)|_{\lambda=M}$  — матричный характеристический многочлен замкнутой системы.

### Примеры

1. Объект управления имеет дискретную модель в виде

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0,00413 \\ 0 & 0,524 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,712 \end{pmatrix} u(k),$$

$$y(k) = x(k), \quad x(0) = h.$$

Выполним синтез замкнутой системы управления с линейным регулятором для перевода системы из произвольного начального состояния  $x(0)$  в положение покоя так, чтобы полюса замкнутой системы располагались в точках  $\{0,5 \pm j0,85\}$ .

Задача синтеза разрешима, поскольку объект управления с заданными матрицами  $M, N$  вполне управляем:

$$\text{rank}(N : MN) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0,005 & 0,00794 \\ 0,712 & 0,373 \end{pmatrix} = 2.$$

Запишем характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \det(\lambda E - (M - NS)) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 + 0,05s_1 & -0,00413 + 0,005s_2 \\ 0,712s_1 & \lambda - 0,524 + 0,712s_2 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \lambda^2 + (0,05s_1 + 0,712s_2 - 1,524)\lambda + \\ &+ (0,00032s_1 - 0,712s_2 + 0,524); \end{aligned}$$

$$S = (s_1 \ s_2).$$

Желаемое характеристическое уравнение замкнутой системы, согласно условию синтеза, должно иметь вид  $\varphi^*(\lambda) = 2 - \lambda + 0,975$ , что возможно, когда

$$\begin{aligned} 0,05s_1 + 0,712s_2 - 1,524 &= -1; \\ 0,00032s_1 - 0,712s_2 + 0,524 &= 0,975. \end{aligned}$$

Эти соотношения разрешимы:  $s_1 = 183,3$  и  $s_2 = -0,55$ .

Искомое управление  $u(k) = 183,3x_1(k) - 0,55x_2(k)$  полностью определяет структуру регулятора. Движение синтезированной замкнутой системы описывается моделью

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0,084 & 0,00413 \\ -130,5 & 0,916 \end{pmatrix} x(k), \quad x(0), \quad h.$$

2. Дискретное представление непрерывного объекта с передаточной функцией  $1/s^2$  и шагом дискретизации  $h = 0,1$  задается матрицами

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,1 \end{pmatrix}.$$

Выполним синтез замкнутой дискретной системы управления так, чтобы после замыкания характеристический многочлен системы был равен

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2 \quad \text{с известными параметрами } \alpha_1, \alpha_2.$$

Найдем характеристический многочлен замкнутой системы с линейным регулятором:

$$u(k) = -S x(k); \quad S = (s_1, s_2).$$

Матрица:

$$(M - NS) = \begin{pmatrix} 1 - 0,005s_1 & 0,1 - 0,005s_2 \\ -0,1s_1 & 1 - 0,1s_2 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + (0,1s_2 + 0,005s_1 - 2)\lambda + (1 - 0,1s_2 + 0,005s_1).$$

Условие синтеза  $\varphi(\lambda) = \varphi^*(\lambda)$  может быть выполнено тогда, когда

$$\alpha_1 = 0,1s_2 + 0,005s_1 - 2; \quad \alpha_2 = 1 - 0,1s_2 + 0,005s_1.$$

Искомые коэффициенты обратных связей:

$$s_1 = 100(1 + \alpha_1 + \alpha_2); \quad s_2 = 5(3 + \alpha_1 - \alpha_2).$$

Этот же результат получим с использованием формулы Акермана. Матрица управляемости разомкнутой системы имеет вид

$$R = (N : MN) = \begin{pmatrix} 0,005 & 0,0015 \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$R^{-1} = 100 \begin{pmatrix} -1 & 0,15 \\ 1 & -0,05 \end{pmatrix}.$$

Матричный характеристический многочлен системы равен

$$\varphi^*(M) = M^2 + \alpha_1 M + \alpha_2 E = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 + \alpha_2 & 0,2 + 0,1\alpha_1 \\ 0 & 1 + \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix},$$

поэтому искомая матрица обратных связей принимает вид

$$S = (0 \quad 1)R^{-1}\varphi^*(M) = (100 - 5)\varphi^*(M) = (100(1 + \alpha_1 + \alpha_2) \quad 5(3 + \alpha_1 - \alpha_2)).$$

Искомое управление принимает вид

$$u(k) = -100(1 + \alpha_1 + \alpha_2)x_1 - 5(3 + \alpha_1 - \alpha_2)x_2,$$

что совпадает с полученным ранее результатом.

Возможность свободного размещения полюсов замкнутой системы используем для одного частного случая. Потребуем, чтобы полюса замкнутой системы все располагались в начале координат, тогда желаемый характеристический многочлен системы, очевидно, примет вид  $\varphi^*(\lambda) = \lambda^n$ . Согласно теореме **Гамильтона-Кэли (16.1)**, *всякая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению*; характеристическое уравнение матрицы  $M - NS$  синтезированной системы будет иметь вид

$$\varphi(M - NS) = \varphi^*(M - NS) = (M - NS)^n = 0.$$

Но этот факт означает, что независимо от начального состояния система к моменту  $nh$  окажется в нулевом состоянии.

В самом деле, в замкнутой системе текущее состояние определяется выражением

$$x(k+1) = (M - NS)x(k), \quad x(0), \quad k = 0, 1, \dots,$$

значит, на  $n$ -м шаге состояние

$$x(n) = (M - NS)^n x(0) = 0.$$

Системы, обладающие таким свойством, называют *системами с аperiodической реакцией*, или *системами с конечной длительностью переходного процесса*.

Любая ошибка в такой системе может быть устранена не более чем за  $n$  шагов! Заметим, что существование систем с конечной длительностью переходного процесса — характерная особенность дискретных систем, такого нет в линейных непрерывных системах.

### Пример

Объект управления второго порядка из примера 2 имеет дискретную модель вида

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,1 \end{pmatrix} u(k); \quad x(0), \quad h,$$

$$y(k) = x(k).$$

Потребуем, чтобы после замыкания объекта линейной обратной связью с матрицей  $S$  система имела полюса в нуле, для этого надо, чтобы

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda E - (M - NS)) = \lambda^2,$$

что возможно, когда

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad R^{-1}M^2 = 100(1 - 0,05) \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 100 & 15 \end{pmatrix}.$$

Замкнутая система описывается уравнением

$$x(k+1) = (M - NS)x(k), \quad x(0), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где матрица  $M - NS = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,025 \\ -10 & -0,5 \end{pmatrix}$ , ее квадрат равен нулю.

Проследим изменение состояния системы.

Управление на первом шаге равно

$$u(0) = -100x_1(0) - 15x_2(0).$$

Состояние системы после первого шага управления:

$$x_1(1) = 0,5x_1(0) + 0,025x_2(0);$$

$$x_2(1) = -10x_1(0) + 0,5x_2(0).$$

На втором шаге:

$$u(1) = 100x_1(0) - 10x_2(0) \quad \text{и} \quad x_1(2) = x_2(2) = 0$$

при любых  $x_1(0), x_2(0)$ .

### 12.3. ЦИФРОВЫЕ НАБЛЮДАТЕЛИ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ

Для реализации алгоритмов синтеза необходимы данные о состоянии системы. Некоторые из этих состояний можно измерить, остальные следует вычислять, используя, например, процедуру асимптотического наблюдателя Люинбергера.

**Определение.** *Динамическая система*

$$\underline{x}(k+1|k) = M\underline{x}(k|k-1) + F(y(k) - C\underline{x}(k|k-1)) + Nu(k)$$

называется асимптотическим наблюдателем полного порядка для системы

$$\sum^{(n)}: \quad \begin{cases} \underline{x}(k+1) = M\underline{x}(k) + Nu(k), & \underline{x}(0); \\ y(k) = C\underline{x}(k), \end{cases}$$

если для любого начального состояния  $\underline{x}(0)$  и для всех  $u(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  оценка  $\underline{x}(k)$  с ростом времени асимптотически приближается к вектору состояния  $\underline{x}(k)$ .

Здесь в определении переменная  $\underline{x}(k+1|k)$  обозначает восстановленную оценку вектора состояния  $\underline{x}(k+1)$ , которая была вычислена по результатам измерений на момент  $k$ . Подберем матрицу  $F$  так, чтобы ошибка восстановления  $\varepsilon(k|k-1) = \underline{x}(k) - \underline{x}(k|k-1)$  асимптотически со временем стремилась к нулю.

Динамика изменения ошибки восстановления описывается разностным однородным уравнением

$$\begin{aligned} \varepsilon(k+1|k) &= M\underline{x}(k) + Nu(k) - (M\underline{x}(k|k-1) + F(y(k) - \\ &- C\underline{x}(k|k-1)) + Nu(k)) = (M - FC)\varepsilon(k|k-1), \end{aligned}$$

поэтому асимптотическая сходимость ошибки восстановления к нулю возможна в том случае, когда матрица  $(M - FC)$  асимптотически устойчива, что возможно тогда, когда система  $\sum^{(n)}$  вполне наблюдаема.

Собственные числа матрицы  $(M - FC)$  — полюса наблюдателя могут быть выбраны любыми внутри единичного круга комплексной плоскости. Доказательство этого утвержде-

ния аналогично доказательству аналогичной теоремы для непрерывных систем.

Выбор характеристического многочлена наблюдателя полностью определяет искомую матрицу  $F$ . Рассмотрим один частный случай. Разместим все полюса наблюдателя в начале координат, тогда характеристический многочлен матрицы  $(M - FC)$  примет вид

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^n.$$

Из этого следует в силу теоремы Гамильтона-Кэли, что матрица  $(M - FC)^n = 0$ .

Используем этот факт в уравнении ошибки восстановления:

$$\varepsilon(n) = (M - FC)\varepsilon(n-1) = (M - FC)^n \varepsilon(0) = 0.$$

Синтезированный наблюдатель полного порядка обладает замечательным свойством: любая начальная ошибка  $\varepsilon(0)$  наблюдения исчезает не более чем за  $n$  шагов, иначе говоря, к  $n$ -му шагу наблюдатель полностью восстанавливает значения неизмеряемых координат состояния системы. Такие наблюдатели называют **апериодическими**.

Структура наблюдателя полного порядка определяется матрицей  $F$ , которая может быть найдена из условия синтеза:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda E - (M - FC)) = \varphi^*(\lambda),$$

где  $\varphi^*(\lambda)$  — желаемый характеристический многочлен, который выбирается с учетом местоположения полюсов управляемой системы так, чтобы процесс восстановления протекал гораздо быстрее, чем переходные процессы в системе.

Матрица  $F$ , удовлетворяющая условию синтеза, определяется выражением Акермана [10]:

$$F = \varphi^*(M)Q^{-1}(0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)^T,$$

где  $Q = (C^T : M^T C^T : \dots : (M^{p-1})^T C^T)^T$  — квадратная  $p \times p$  матрица наблюдаемости системы;

$\varphi^*(M) = \varphi^*(\lambda)|_{\lambda=M}$  — матричный характеристический многочлен наблюдателя полного порядка.

Наблюдатели полного порядка обладают избыточностью, поскольку осуществляют вычислительный процесс для всех координат состояния, а значит, и для тех, которые доступны для измерения. Наблюдатели неполного порядка, или наблюдатели Люинбергера, восстанавливают только неизмеряемые координаты состояния.

Структура наблюдателя Люинбергера имеет вид

$$\begin{aligned} \underline{x}(k|k) &= M\underline{x}(k-1|k-1) + F(y(k) - C(M\underline{x}(k-1|k-1) + \\ &+ Nu(k-1))) + Nu(k-1) = (E - FC)(M\underline{x}(k-1|k-1) + \\ &+ Nu(k-1)) + Fy(k). \end{aligned}$$

Ошибка восстановления для этого наблюдателя  $\varepsilon(k|k) = x(k) - \underline{x}(k|k)$  изменяется согласно уравнению

$$\begin{aligned} \varepsilon(k|k) &= Mx(k-1) + Nu(k-1) - (M\underline{x}(k-1|k-1) + F(y(k) - \\ &- C(M\underline{x}(k-1|k-1) + Nu(k-1))) + Nu(k-1)) = Mx(k-1) - \\ &- M\underline{x}(k-1|k-1) - F(C(Mx(k-1) + Nu(k-1))) + \\ &+ FC(M\underline{x}(k-1|k-1) + Nu(k-1)) = (E - FC)M\varepsilon(k-1|k-1). \end{aligned}$$

Это однородное разностное уравнение будет асимптотически устойчивым, если асимптотически устойчива матрица  $(E - FC)M$ , что возможно сделать подбором свободной матрицы  $F$ .

Заметим, что

$$\begin{aligned} y(k) - C\underline{x}(k|k) &= C\varepsilon(k|k) = C(E - FC)M\varepsilon(k-1|k-1) = \\ &= (E - CF)CM\varepsilon(k-1|k-1). \end{aligned}$$

Пусть для определенности система имеет  $g$  измеряемых выходов, значит, матрица  $C$  имеет размер  $g \times p$ , но тогда  $F$  имеет размер  $p \times g$  и матрица  $(E - CF)$  — квадратная размером  $g \times g$ . Если матрицу  $F$  подобрать так, чтобы  $CF = E$ , то окажется, что  $C\underline{x}(k|k) = y(k)$ .

Но это означает, что все  $g$  выходных координат восстанавливаются точно. Поэтому из модели наблюдателя можно исключить  $g$  уравнений. Порядок наблюдателя Люинбергера в этом случае оказывается равным  $p - g$ .

## Примеры

1. Для системы

$$\Sigma^{(2)}: M = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = (0 \quad 1)$$

найти структуру наблюдателя полного порядка с характеристическим многочленом  $\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 + 20\lambda + 200$ .

Система вполне наблюдаема, поскольку

$$\text{rang}(C^T : M^T C^T) = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} = 2,$$

поэтому задача синтеза наблюдателя разрешима. Полюса наблюдателя совпадают с характеристическими числами матрицы  $(M - FC)$ , где  $F = (f_1 \quad f_2)^T$ . Найдем эти числа.

Условие синтеза

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \det(\lambda E - (M - FC)) = \lambda^2 + (f_1 - 5)\lambda + (4 - f_1 + 0,1f_2) = \\ &= \varphi^*(\lambda) \end{aligned}$$

выполнится, если  $f_1 = 25$ ,  $f_2 = 2960$ . Структура наблюдателя второго порядка определяется разностным уравнением

$$\underline{x}(k+1|k) = \begin{pmatrix} -24 & 0,1 \\ -2960 & 4 \end{pmatrix} \underline{x}(k|k-1) + \begin{pmatrix} 25 \\ 2960 \end{pmatrix} y(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k).$$

2. Найдем структуру наблюдателя Люинбергера первого порядка.

Потребуем выполнения условия

$$\mathbf{E} = \mathbf{CF} = (0 \quad 1)(f_1 \quad f_2)^T = f_1 = 1.$$

Теперь структура наблюдателя Люинбергера определяется уравнением

$$\begin{aligned} \underline{x}(k|k) &= (\mathbf{E} - \mathbf{FC})(\mathbf{M}\underline{x}(k-1|k-1) + \mathbf{N}u(k-1)) + \mathbf{F}y(k) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_2 & f_2 + 4 \end{pmatrix} \underline{x}(k-1|k-1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k-1) + \begin{pmatrix} 1 \\ f_2 \end{pmatrix} y(k). \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\underline{x}_2(k|k) = f_2 x_1(k-1) + (f_2 + 4) \underline{x}_2(k-1|k-1) + u(k-1) + f_2 y(k).$$

Выбором числового значения  $f_2$  можно улучшать качество процесса восстановления. Оценка первой координаты, очевидно, совпадает с выходом системы и поэтому не требует вычисления.

## 12.4. УПРАЖНЕНИЯ

1. Определить параметры цифрового ПИ-регулятора для объекта управления с передаточной функцией

$$W(s) = 20/((s+1)(s+2))$$

так, чтобы установившаяся ошибка воспроизведения единичного скачка была нулевой.

2. Для типовой структуры цифровой системы управления с передаточной функцией непрерывной части прямой цепи  $W(z)$  установившаяся ошибка определяется выражением

$$e^* = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kh) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})R(z)/(1 + W(z)),$$

где  $R(z)$  — Z-преобразование задающего сигнала.

Показать, что установившаяся ошибка отработки единичного ступенчатого воздействия равна

$$e^* = \lim_{z \rightarrow 1} 1/(1 + W(z)),$$

а установившаяся ошибка отработки единичного линейного воздействия равна

$$e^* = \lim_{z \rightarrow 1} h/((z-1)W(z)).$$

3. Цифровой регулятор может быть реализован в виде последовательно соединенных фиксатора нулевого порядка и импульсного RC-фильтра. Описать внешнюю модель такого регулятора. Найти передаточную функцию импульсного RC-фильтра для реализации регулятора с передаточной функцией:

$$a) W_p(z) = z(z-0,1)/(z-0,8);$$

$$б) W_p(z) = (z-0,1)/(z(z-0,8)).$$

4. Найти дискретные представления передаточных функций типовых регуляторов, используя аппроксимации Эйлера, обратной разности и Тустена. Определить соотношения между соответствующими параметрами непрерывного и дискретного представлений.

5. Найти структуру линейного регулятора для стабилизации состояния объекта, модель которого задается матрицами:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 0,5h^2 \\ h \end{pmatrix}.$$

Замкнутая система стабилизации должна иметь характеристический многочлен вида

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2.$$

6. Осуществить линейный синтез замкнутой дискретной системы с заданным характеристическим многочленом  $\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 + 1,6\lambda + 0,6$ , если неизменяемая часть системы задается матрицами:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0,08 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,04 \end{pmatrix}; \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad h = 0,5.$$

Выполнить моделирование переходного процесса в синтезированной системе.

7. Найти структуру линейного регулятора для апериодической стабилизации состояния объекта, модель которого задается матрицами:

$$a) N = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$b) N = \begin{pmatrix} 0,5h^2 \\ h \end{pmatrix}.$$

Изобразить процесс перевода системы из состояния  $x(0)$  в начало координат для двух случаев: а)  $h = 0,1$ ; б)  $h = 0,5$ .

8. Для системы, которая задается матрицами

$$M = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 0,5h^2 \\ h \end{pmatrix}; \quad C = (1 \quad 0):$$

а) найти алгоритм вычисления неизмеряемой координаты состояния  $x_2(k)$  по результатам измерений выхода и входа;

б) синтезировать асимптотический наблюдатель полного порядка с характеристическим многочленом общего вида:

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2;$$

в) определить структуру асимптотического наблюдателя Люинбергера первого порядка;

г) выполнить моделирование процесса восстановления неизмеряемых координат состояния системы.

9. Найти структуру наблюдателя полного порядка для системы

$$\Sigma^{(2)}: M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = (2 \quad 0)$$

так, чтобы характеристический полином наблюдателя был равен

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 + 10\lambda.$$

Замкнуть систему с управлением  $u(k) = -Sx(k)$ , определить процесс стабилизации при произвольных начальных отклонениях от положения покоя.

10. Для непрерывной системы

$$\Sigma^{(2)}: A = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = (1 \quad 0); \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

найти структуру непрерывного регулятора, при котором бы замкнутая система имела полюса  $\{5 \pm j4\}$ . Выполнить:

а) дискретизацию непрерывного регулятора. Подобрать необходимый шаг дискретизации;

б) синтез цифровой системы управления, используя в структуре асимптотический наблюдатель полного порядка.

Сравнить результаты, моделируя процессы управления.

## 13 СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

---

---

*Задачи синтеза систем управления при случайных воздействиях — Синтез управления с минимальной дисперсией ошибки — Оптимальная стохастическая фильтрация — Фильтры Калмана — Параметрическая идентификация — Упражнения.*

### 13.1. ЗАДАЧИ СИНТЕЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Рассмотрим линейную автоматическую систему с передаточной функцией  $H(s)$  и импульсной характеристикой  $k(t)$ , которая испытывает со стороны входа непрерывное стохастическое воздействие  $\varphi(t)$  в виде суммы полезного задающего сигнала  $u(t)$  и помехи  $\mu(t)$ . Пусть обе составляющие входного воздействия представляются стационарными случайными процессами с нулевым средним. Назначение системы состоит в том, чтобы возможно точно воспроизвести полезную составляющую  $u(t)$  входного сигнала. Будем оценивать точность воспроизведения по величине разности

$$\varepsilon(t; \eta) = u(t + \eta) - y(t),$$

называемой:

- *ошибкой фильтрации*, если  $\eta = 0$ ;
- *ошибкой сглаживания*, если  $\eta < 0$ ;
- *ошибкой прогноза*, если  $\eta > 0$ .

В этой связи будем различать три задачи синтеза системы управления для воспроизведения полезного входного сигнала



с минимальной дисперсией ошибки: **задачу фильтрации, задачу прогноза и задачу сглаживания.**

В каждой задаче необходимо найти такую передаточную функцию  $H(s)$  замкнутой системы, чтобы для нее

$$M \varepsilon^2(t; \eta) \rightarrow \min_{H(s)}$$

Выполним более общую постановку задачи синтеза. Пусть система задана своей внутренней моделью:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(n)}: \quad x'(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \mu(t), & x(0) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

где  $\mu(t)$  — белый шум интенсивностью  $Q_\mu$ ;  
 $x(0)$  — начальное состояние системы, рассматриваемое как стохастическая переменная с нулевым средним и дисперсией  $M\{x^T(0)x(0)\} = Q_0$ .

**Задача оптимального стохастического синтеза регулятора** состоит в том, чтобы отыскать такое управление  $u(t)$ , которое переводит систему  $\Sigma^{(n)}$  из начального состояния  $x(0)$  в положение покоя с минимальным значением критерия качества:

$$J = M \int_0^T (x^T(t)R_1x(t) + u^T(t)R_2u(t))dt,$$

где  $R_1, R_2$  — положительно-определенные симметрические матрицы.

В том случае, когда действующая на систему помеха  $\beta(t)$  не является белым шумом, задача синтеза, тем не менее, может быть сведена к настоящей формулировке. Для этого следует рассматривать  $\beta(t)$  как выходной сигнал некой линейной динамической системы  $\Sigma^{(m)}$ , возмущаемой белым шумом:

$$z'(t) = A_p z(t) + \mu(t); \quad \beta(t) = C_p z(t), \quad z(0).$$

Теперь модель системы управления  $S^{(n+m)}$  имеет расширенный вектор состояния  $(x(t), z(t))^T$ , расширенную матрицу со-

РИС. 110

стояния  $\begin{pmatrix} A & C_p \\ 0 & A_p \end{pmatrix}$ , рас-

ширенную матрицу управления  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A_p \end{pmatrix}^T$  и вектор возмущения  $\begin{pmatrix} 0 & \mu(t) \end{pmatrix}^T$  в виде белого шума. Структуры основной и расширенной систем управления представлены на рис. 110, а, б соответственно.

Рассмотрим линейную систему, которая предназначена для воспроизведения случайного командного сигнала  $r(t)$  с известными стохастическими характеристиками. Выполним постановку **задачи синтеза оптимальной стохастической следящей системы** как частный случай задачи синтеза оптимального регулятора.

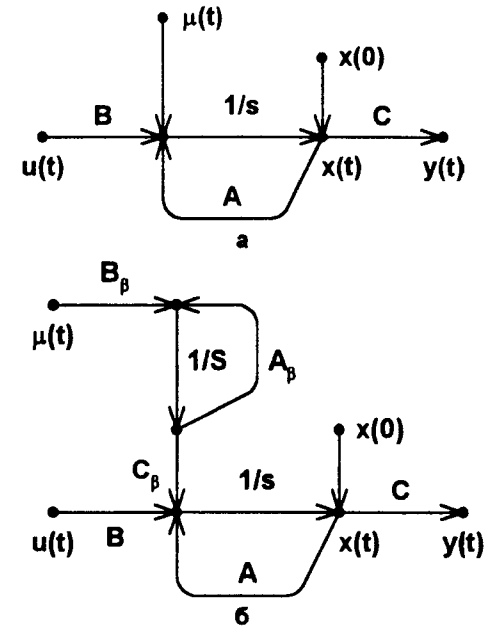
Командный случайный сигнал будем рассматривать как выходной сигнал динамической системы, возбуждаемой белым шумом:

$$z'(t) = A_p z(t) + \mu(t), \quad r(t) = C_p z(t),$$

где  $\mu(t)$  — белый шум интенсивностью  $Q_\mu$ .

Объединим модель системы и модель задания, введя в рассмотрение расширенный вектор состояния  $(x(t), z(t))^T$ , расширенную матрицу состояния  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_p \end{pmatrix}$ , расширенную матрицу управления  $\begin{pmatrix} B & 0 \end{pmatrix}^T$  и вектор возмущения  $\begin{pmatrix} 0 & \mu(t) \end{pmatrix}^T$ .

Необходимо синтезировать управление  $u(t)$ , при котором система  $\Sigma^{(n)}$  отслеживает командный сигнал  $r(t)$  с минимальным значением критерия качества:



$$J = M \int_0^T (\mathbf{e}^T(t) \mathbf{R}_1 \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}_2 \mathbf{u}(t)) dt,$$

где  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \rho(t)$  — ошибка слежения.

### 13.2. СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ С МИНИМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ОШИБКИ

На рис. 111, а изображена структурная схема образования ошибки фильтрации, в которой изображены реальная система с передаточной функцией  $H(s)$  и идеальная система с передаточной функцией, равной единице.

Пусть первоначально поставлена задача параметрического синтеза системы слежения, которая состоит в том, чтобы при известной с точностью до параметров передаточной функции системы  $H(s; \alpha, \beta, \dots, \gamma)$  найти значения параметров, при которых дисперсия ошибки фильтрации была бы минимальной.

Величину дисперсии ошибки фильтрации  $J = M \varepsilon^2(t)$ , которой оценивается качество слежения, можно найти, зная спектральную плотность ошибки  $S_\varepsilon(\omega)$ . В самом деле,

$$M \varepsilon^2(t) = R_\varepsilon(0) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega) d\omega.$$

Спектральная плотность ошибки фильтрации, в свою очередь, можно найти, зная спектральные плотности  $S_u(\omega)$ ,  $S_\mu(\omega)$  задающего сигнала  $u(t)$  и помехи  $\mu(t)$  соответственно:

$$S_\varepsilon(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_\mu(\omega) + |1 - H(j\omega)|^2 S_u(\omega),$$

что следует из схемы 111, б которая эквивалентна схеме, изображенной на рис. 111, а.

Таким образом, искомая величина среднего квадрата ошибки фильтрации входного сигнала может быть вычислена в виде

$$M \varepsilon^2(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (|H(j\omega)|^2 S_\mu(\omega) + |1 - H(j\omega)|^2 S_u(\omega)) d\omega.$$

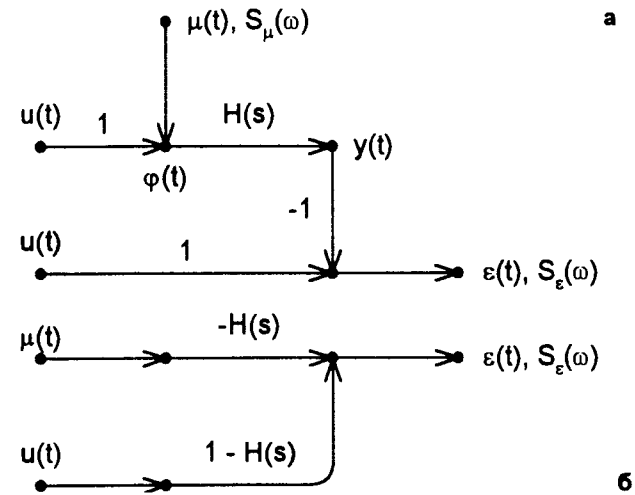


РИС. 111

Для определения этой оценки, в том случае, когда подынтегральное выражение является дробно-рациональным, следует воспользоваться формулой Парсеваля и известной процедурой вычисления (см. разд. 7.4).

Величина оценки  $J = M \varepsilon^2(t)$  является функцией параметров  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$  системы в силу того, что передаточная функция системы  $H(s; \alpha, \beta, \dots, \gamma)$  определена с точностью до параметров. Поэтому для завершения задачи синтеза необходимо минимизировать скалярную функцию  $J(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ , что позволит найти оптимальные значения параметров передаточной функции системы.

#### Примеры

1. На вход замкнутой системы с передаточной функцией  $H(s; k) = k/(Ts + 1)$  действуют полезный случайный сигнал со спектральной плотностью  $S_u(\omega) = b/(a^2 + \omega^2)$  и помеха в виде белого шума интенсивностью  $c^2$ . Следует подобрать параметр  $k$  системы, чтобы минимизировать среднеквадратическую ошибку воспроизведения полезного сигнала.

Найдем составляющие спектральной плотности ошибки:

$$|H(j\omega)|^2 S_u(\omega) = c^2 k^2 / (1 + T^2 \omega^2);$$

$$|1 - H(j\omega)|^2 S_u(\omega) = b((1 - k)^2 + T^2 \omega^2) / ((1 + T^2 \omega^2)(a^2 + \omega^2)),$$

а затем путем прямого интегрирования определим и соответствующие составляющие среднего квадрата ошибки:

$$J(k) = M\varepsilon^2(t) = c^2 k^2 / 2T + b(1 + Ta - 2k + k^2) / (2a(1 + Ta)).$$

Найденная оценка зависит от переменного  $k$ . Необходимое условие минимума этой оценки:

$$dJ(k)/dk = -c^2 k^2 / 2T^2 + bk(2 - a) / (1 + Ta)^2 = 0,$$

откуда находим искомое оптимальное значение параметра передаточной функции синтезированной системы:

$$k^* = Tb / (ac^2(1 + Ta) + Tb).$$

2. Следящая система канонической структуры имеет передаточную функцию прямого тракта:  $W(s; k) = k / (s(s + 2))$ . Задающий сигнал системы является случайным со спектральной плотностью  $S_u(\omega) = 1 / (1 + \omega^2)$ . На систему воздействует помеха в виде белого шума интенсивностью  $c^2$ . Следует определить величину коэффициента передачи системы, при которой дисперсия ошибки фильтрации была бы минимальной.

Передаточная функция ошибки системы от помехи равна

$$H(s) = -W(s) / (1 + W(s)) = -k / (s(s + 2) + k);$$

передаточная функция ошибки системы от входного сигнала равна

$$1 - H(s) = s(s + 2) / (s(s + 2) + k),$$

поэтому составляющие спектральной плотности ошибки соответственно от помехи и полезного сигнала принимают вид

$$S_{\varepsilon(\omega)}(\omega) = |k / (j\omega(j\omega + 2) + k)|^2 c^2 = c^2 k^2 / (j\omega)^2 + 2j\omega + k|^2;$$

$$S_{\varepsilon(\omega)}(\omega) = |j\omega(j\omega + 2) / (j\omega(j\omega + 2) + k)|^2 1 / (1 + \omega^2) =$$

$$= ((j\omega)^4 - 4(j\omega)^2) / (j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + (2 + k)j\omega + k|^2.$$

Спектральная плотность ошибки складывается из двух составляющих дробно-рационального вида, поэтому величину дисперсии ошибки можно вычислить, используя таблицы Мак-Ленна или матричным методом (см. разд. 7.4). Воспользуемся матричным методом. Параметры дробно-рационального выражения составляющей спектральной плотности от помехи  $S_{\varepsilon(\mu)}(\omega)$  таковы:

$$n = 2; \quad a_0 = 1; \quad a_1 = 2; \quad a_2 = k; \quad b_1 = 0; \quad b_2 = c^2 k^2.$$

Поэтому соответствующая составляющая дисперсии ошибки равна

$$(-1)^3 N_2 / (2a_0 G_2) = 0,25c^2 k.$$

В этом выражении  $G_2$  — определитель матрицы Гурвица многочлена  $(j\omega)^2 + 2j\omega + k$ , который равен  $2k$ .  $N_2$  получается из той же матрицы Гурвица заменой ее первой строки на элементы  $b_1, b_2$ , поэтому

$$N_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & c^2 k^2 \\ 1 & k \end{pmatrix} = -c^2 k^2.$$

Дробно-рациональное выражение составляющей  $S_{\varepsilon(\omega)}(\omega)$  спектральной плотности от задающего сигнала задается параметрами:  $n = 3; a_0 = 1; a_1 = 3; a_2 = 2 + k; a_3 = k; b_1 = 1; b_2 = -4; b_3 = 0$ , поэтому соответствующая составляющая дисперсии ошибки определяется выражением

$$(-1)^4 N_3 / (2a_0 G_3),$$

где  $G_3 = 2k(k + 3)$  — определитель матрицы Гурвица многочлена  $(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + (2 + k)j\omega + k$ . Определитель  $N_3 = k(k + 6)$  получается из той же матрицы Гурвица заменой ее первой строки на элементы  $b_1, b_2, b_3$ . В результате составляющая дисперсии ошибки от задающего сигнала равна  $0,25(k + 6) / (k + 3)$ .

Полное выражение для дисперсии ошибки воспроизведения задающего сигнала принимает вид

$$J(k) = 0,25(c^2 k^2 + (3c^2 + 1)k + 6) / (k + 3).$$

Минимизация этого выражения позволяет найти оптимальное выражение для коэффициента передачи системы:

$$dJ(k)/dk = 3 - c^2(k + 3)^2 = 0, \quad \text{откуда } k^* = 1,73/c - 3.$$

Вернемся, однако, к общей постановке задачи синтеза. Пусть  $\varphi(t)$  — входной сигнал системы, включающий полезный задающий сигнал  $u(t)$  и аддитивную помеху  $\mu(t)$ , а  $y(t)$  — установившийся выходной сигнал системы,

$$y(t) = \int_0^{\infty} \varphi(t - \tau)k(\tau)d\tau.$$

Задача фильтрации состоит в определении импульсной характеристики  $k(t)$  или передаточной функции  $H(s)$  системы, которые позволяют фильтровать помеху так, что

$$M\varepsilon^2(t) \rightarrow \min_{H(s)}, \quad \varepsilon(t) = u(t) - y(t).$$

Найденную характеристику или передаточную функцию будем называть *оптимальной*, а саму систему — *оптимально-фильтрующей*.

Раскроем и преобразуем выражение  $M\varepsilon^2(t)$ :

$$\begin{aligned} M\varepsilon^2(t) &= M\left[u(t) - \int_0^{\infty} \varphi(t - \tau)k(\tau)d\tau\right]^2 = Mu^2(t) - \\ &- 2\int_0^{\infty} k(\tau)M[u(t)\varphi(t - \tau)]d\tau + \int_0^{\infty} k(\tau) \int_0^{\infty} k(\theta) M[\varphi(t - \tau)\varphi(t - \theta)] d\theta d\tau = \\ &= R_u(0) - 2\int_0^{\infty} k(\tau)R_{\varphi u}(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} k(\tau) \int_0^{\infty} k(\theta)R_{\varphi}(\tau - \theta)d\theta d\tau. \end{aligned}$$

В этом выражении корреляционные функции  $R_u$ ,  $R_{\varphi u}$ ,  $R_{\varphi}$  являются известными характеристиками, поскольку предполагаются известными стохастические свойства случайных процессов  $u(t)$  и  $\mu(t)$ .

## Теорема

*Искомая оптимальная импульсная характеристика системы  $k^*(t)$ , при которой  $M\varepsilon^2(t)$  достигает минимального значения, удовлетворяет интегральному уравнению Винера-Хопфа:*

$$R_{\varphi u}(\tau) - \int_0^{\infty} k^*(\theta)R_{\varphi}(\tau - \theta)d\theta = 0, \quad t \geq 0.$$

Это утверждение формулирует необходимое и достаточное условие минимума среднеквадратической ошибки фильтрации.

Заметим, что интеграл в уравнении Винера-Хопфа имеет вид свертки и совпадает со взаимной корреляционной функцией выхода ко входу  $R_{\varphi u}(\tau)$ , поэтому уравнение Винера-Хопфа можно записать в лаконичной форме:

$$R_{\varphi u}(\tau) = R_{\varphi u}(\tau),$$

Норберт Винер (N. Wiener, 1943) предложил частотный метод решения задачи синтеза оптимально-фильтрующей системы. Последуем этому методу.

Пусть  $S_{\varphi}(\omega)$  — спектральная плотность входного сигнала. Эта функция четная и положительная, поэтому представим ее в виде произведения двух комплексно-сопряженных функций:

$$S_{\varphi}(\omega) = |\Psi(j\omega)|^2 = \Psi(j\omega)\Psi(-j\omega).$$

Такое преобразование называют *факторизацией*.

Представим искомую передаточную функцию в виде произведения  $H(s) = \Psi^{-1}(s)G(s)$ ; такому представлению отвечает последовательное соединение двух частей системы. Пусть  $z(t)$  — промежуточная между этими частями переменная, ее спектральная плотность равна

$$S_z(\omega) = |\Psi^{-1}(j\omega)|^2 S_{\varphi}(\omega) = 1.$$

Значит,  $z(t)$  — белый шум с единичной интенсивностью и ее автокорреляционная функция  $R_z(\tau) = \delta(\tau)$ . Для того чтобы сис-

тема с  $H(s)$  оптимально фильтровала сигнал входа  $\varphi(t)$ , необходимо, чтобы часть системы с передаточной функцией  $G(s)$  оптимально фильтровала свой входной сигнал  $z(t)$ . Но это возможно, когда  $g(t)$  — импульсная характеристика второй части системы — удовлетворяет уравнению Винера:

$$R_{zu}(\tau) = \int_0^{\infty} g^*(\theta) R_z(\tau - \theta) d\theta = \int_0^{\infty} g^*(\theta) \delta(\tau - \theta) d\theta = g^*(\tau).$$

Получен интересный результат:  $g^*(\tau) = R_{zu}(\tau)$  — импульсная характеристика части оптимально-фильтрующей системы совпадает со взаимной корреляционной функцией белого шума и полезного сигнала. Осталось найти функцию  $R_{zu}(\tau)$ .

Спектральная плотность и корреляционная функции случайного процесса связаны преобразованием Фурье, поэтому

$$R_{zu}(\tau) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} S_{zu}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Кроме того,

$$S_{zu}(\omega) = \Psi^{-1}(-j\omega) S_{\varphi u}(\omega) = \Psi^{-1}(-j\omega) S_u(\omega).$$

Это соотношение справедливо, потому что задающий сигнал  $u(t)$  и помеха  $\mu(t)$  независимы. Собрав вместе эти соотношения, получим искомую импульсную характеристику:

$$g^*(\tau) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^{-1}(-j\omega) S_u(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Теперь можно определить передаточную функцию  $G(s)$  как преобразование Лапласа от импульсной характеристики:

$$G(s) = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^{-1}(-j\omega) S_u(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega d\tau.$$

Обозначим:

$$\Psi^{-1}(-j\omega) S_u(\omega) = N(j\omega).$$

Рассмотрим функцию  $N(s)$ , которая получается из  $N(j\omega)$  заменой  $j\omega$  на  $s$ . Функция  $N(s)$  — дробно-рациональная, поэтому ее можно представить в виде суммы двух дробно-рациональных выражений  $N(s) = N_+(s) + N_-(s)$ , одно из которых имеет полюса только в левой полуплоскости, другое — только в правой. Винер доказал, что для физически реализуемых систем  $G(s) = N_+(s)$ . Таким образом, искомая передаточная функция оптимально-фильтрующей системы определяется выражением

$$H^*(s) = N_+(s)/\Psi(s).$$

Приведенные рассуждения достаточно конструктивны, чтобы реализовать процедуру синтеза.

### Примеры

1. Пусть полезное входное воздействие имеет вид случайного телеграфного сигнала неизменной единичной амплитуды с числом перемен знака на интервале, распределенным по закону Пуассона с параметром, равным 0,5. Аддитивная помеха представляет собой белый шум интенсивностью  $c^2$ . Следует найти передаточную функцию оптимального фильтра.

Полезный сигнал имеет спектральную плотность  $S_u(\omega) = 1/(\omega^2 + 1)$ , поэтому спектральная плотность входного сигнала:

$$S_{\varphi}(\omega) = c^2 + 1/(\omega^2 + 1) = (c^2 \omega^2 + (c^2 + 1))/(\omega^2 + 1).$$

Выполним факторизацию этого выражения:

$$S_{\varphi}(\omega) = ((c^2 + 1)^{0.5} + cj\omega)/(1 + j\omega) ((c^2 + 1)^{0.5} - cj\omega)/(1 - j\omega),$$

следовательно,

$$\Psi(j\omega) = ((c^2 + 1)^{0.5} + cj\omega)/(1 + j\omega)$$

и 
$$\Psi(s) = ((c^2 + 1)^{0.5} + cs)/(1 + s).$$

Полезный сигнал и помеха независимы, поэтому  $S_{\varphi u}(\omega) = S_u(\omega)$ , а значит,

$$N(j\omega) = (1 - j\omega)/((\omega^2 + 1)(c^2 + 1)^{0.5} - jc\omega) =$$

$$= 1/((1 + j\omega)(c^2 + 1)^{0.5} - cj\omega);$$

$$N(s) = 1/((1 + s)(c^2 + 1)^{0.5} - cs).$$

Разложим функцию  $N(s)$  на сумму правильных дробей и определим те дроби, которые имеют полюса в левой комплексной полуплоскости:

$$N(s) = ((c^2 + 1)^{0.5} + c)^{-1} [1/(1 + s) + 1/((c^2 + 1)^{0.5} - cs)];$$

$$N_+(s) = ((c^2 + 1)^{0.5} + c)^{-1} / (1 + s).$$

Искомая передаточная функция оптимального фильтра имеет вид

$$H^*(s) = N_+(s)/\Psi(s) = ((c^2 + 1)^{0.5} + c)^{-1} / ((c^2 + 1)^{0.5} + cs).$$

Фильтр оказался инерционным звеном первого порядка с коэффициентом передачи и постоянной времени, равными

$$k^* = (c(c^2 + 1)^{0.5} + c^2 + 1)^{-1}; \quad T^* = c(c^2 + 1)^{-0.5}.$$

2. Полезный сигнал с известной спектральной плотностью  $S_U(\omega)$  очень слаб на фоне помехи, которая является белым шумом интенсивностью  $c^2$ . Следует найти структуру фильтра, восстанавливающего полезный сигнал с минимальной среднеквадратической ошибкой.

По условиям задачи спектральная плотность входного сигнала  $S_\Phi(\omega)$  практически неизменна и равна  $c^2$ , поэтому в результате факторизации получаем  $\Psi(s) = c$ . Функция  $N(j\omega) = S_U(\omega)/c$ , но тогда оказывается, что  $N_+(j\omega) = S_U(\omega)/c$ . Все это позволяет определить частотную характеристику оптимального фильтра  $H^*(j\omega) = S_U(\omega)/c^2$ , которая оказывается пропорциональной спектральной плотности полезного сигнала, и коэффициент пропорциональности — величину, обратную интенсивности шума.

### 13.3. ОПТИМАЛЬНАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Вернемся к общей постановке задачи синтеза. Пусть система задана своей внутренней моделью:

$$\Sigma^{(n)}: \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \mu(t), & x(0) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

где  $\mu(t)$  — белый шум интенсивностью  $Q_\mu$ ;  
 $x(0)$  — начальное состояние системы, рассматриваемое как стохастическая переменная с нулевым средним и дисперсией  $M\{x(0)x^T(0)\} = Q_0$ .

Задача синтеза оптимального стохастического регулятора состоит в том, чтобы отыскать управление  $u(t)$  для перевода системы  $\Sigma^{(n)}$  из  $x(0)$  в начало координат, при котором будет достигаться минимум критерий качества:

$$J = M \int_0^T (x^T(t)R_1x(t) + u^T(t)R_2u(t))dt,$$

где  $R_1, R_2$  — положительно-определенные симметрические матрицы.

Будем предполагать, как и ранее в детерминированном случае, что  $C = E$  — все компоненты вектора состояния можно точно измерить в любой момент времени. В этом случае задача оптимального синтеза имеет решение в линейной форме [3]:

$$u(t) = -K(t)x(t); \quad K(t) = R_2^{-1}B^T P(t),$$

где  $P(t)$  — решение матричного дифференциального уравнения Риккати:

$$P'(t) + A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR_2^{-1}B^T P(t) + R_1 = 0, \quad P(T) = 0.$$

В том случае, если время регулирования  $T$  достаточно велико, функция  $P(t)$  имеет установившееся значение  $P$ , которое удовлетворяет алгебраическому уравнению:

$$A^T P + PA - PBR_2^{-1}B^T P + R_1 = 0.$$

Закон управления  $u(t) = -Kx(t)$ ,  $K = R_2^{-1}B^T P$  оказывается оптимальным, поскольку минимизирует критерий

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} M \{x^T(t)R_1 x(t) + u^T(t)R_2 u(t)\}.$$

При этом минимальное значение данного критерия равно  $J^* = \text{Tr}(PQ\mu)$ .

Задача синтеза оптимальной стохастической следящей системы состоит в том, чтобы отыскать такое управление  $u(t)$ , при котором система  $\Sigma^{(n)}$  отслеживает командный сигнал  $\rho(t)$  с минимальным значением критерия качества:

$$J = M \int_0^{\infty} (e^T(t)R_1 e(t) + u^T(t)R_2 u(t)) dt,$$

где  $e(t) = y(t) - \rho(t)$  — ошибка слежения.

Вновь предположим, что все координаты вектора состояния доступны для измерения  $C = E$ , в этом случае задача синтеза оптимальной стохастической следящей системы имеет решение в линейной форме [3]:

$$u(t) = -Kx(t) + Fz(t),$$

где  $K = R_2^{-1}B^T P_{11}$  — матрица коэффициентов обратных связей системы;

$F = -R_2^{-1}B^T P_{12}$  — матрица коэффициентов прямых связей системы;

матрицы  $P_{11}$ ,  $P_{12}$  — элементы блочной матрицы  $P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix}$ , которые удовлетворяют алгебраическим уравнениям:

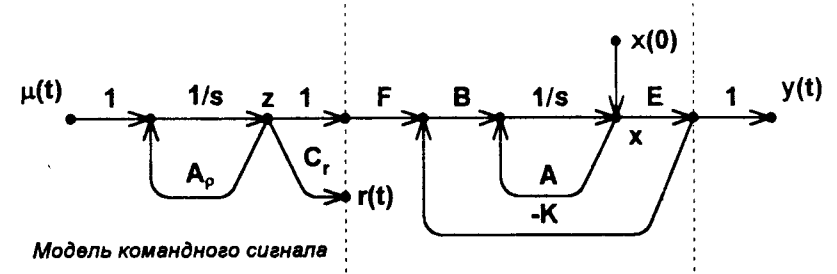


РИС. 112

$$\begin{aligned} A^T P_{11} + P_{11} A - P_{11} B R_2^{-1} B^T P_{11} + C^T R_1 C &= 0; \\ A^T P_{12} + P_{12} A - P_{11} B R_2^{-1} B^T P_{12} - C^T R_1 C_p &= 0; \\ A_p^T P_{22} + P_{22} A_p - P_{12} B R_2^{-1} B^T P_{12} + C_p^T R_1 C_p &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения следует интересный результат: матрица  $P_{11}$  и, следовательно, матрица обратных связей системы  $K$  определяется только свойствами модели системы и не зависит от стохастических свойств командного сигнала  $\rho(t)$ , поэтому управление может быть определено, как в детерминированном случае. Матрицы  $P_{12}$ ,  $P_{22}$  и, следовательно, матрица прямых связей  $F$ , естественно, зависят от стохастических свойств задающего сигнала. На рис. 112 приведена структура модели оптимальной стохастической следящей системы.

### Пример

Исполнительным механизмом следящей системы является двигатель постоянного тока, модель которого

$$x'(t) = -0,1x(t) + 1,5u(t).$$

Следует найти структуру управляющего устройства, чтобы система максимально точно отслеживала случайное задание  $\rho(t)$ . Автокорреляционная функция этого случайного процесса имеет вид

$$R_p(\tau) = 25e^{-0,4|\tau|}.$$

Определим динамическую систему, генерирующую случайный командный сигнал  $\rho(t)$  под воздействием белого шума.

Спектральная плотность процесса  $\rho(t)$  имеет вид

$$S(\omega) = 20/(\omega^2 + 0,16),$$

что позволяет представить  $S(\omega) = 20|1/(j\omega + 0,4)|^2$ . Поэтому передаточная функция динамического звена, формирующего процесс  $\rho(t)$ , принимает вид  $1/(s + 0,4)$ , а модель процесса описывается линейным дифференциальным уравнением:

$$\rho'(t) = -0,4 \rho(t) + \mu(t),$$

где  $\mu(t)$  — белый шум интенсивностью  $20 \text{ с}^{-2}$ .

Введем расширенный вектор состояния  $(x(t) \rho(t))^T$ . Тогда расширенная модель управляемого объекта и форсирующего фильтра принимает вид

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ \rho'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ 0 & -0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \rho(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu(t).$$

Для завершения постановки задачи синтеза выберем критерий качества в виде

$$J = M \int_0^{\infty} ((x(t) - \rho(t))^2 + 100u^2(t)) dt.$$

Будем разыскивать управление в виде

$$u(t) = -Kx(t) + F\rho(t),$$

где  $K = R_2^{-1} B^T P_{11} = 0,015P_{11}$ ;  $F = R_2^{-1} B^T P_{12} = 0,015P_{12}$ .

Числа  $P_{11}$ ,  $P_{12}$  удовлетворяют уравнениям

$$0,0225(P_{11})^2 + 0,2P_{11} - 1 = 0;$$

$$(0,3 + 1,5K)P_{11} + 1 = 0,$$

поэтому  $P_{11} = 12,46$ ;  $P_{12} = -1,723$ .

Искомые коэффициенты прямой и обратной связи:

$$F = 0,0258; \quad K = 0,187.$$

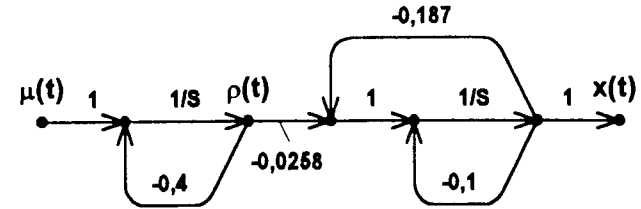


РИС. 113

Структура оптимальной стохастической следящей системы принимает вид, изображенный на рис. 113.

Для полного определения матрицы  $P$  найдем  $P_{22}$  из уравнения

$$0,0225(P_{12})^2 + 0,8P_{22} - 1 = 0, \quad P_{22} = 1,166.$$

$$\text{Таким образом, } P = \begin{pmatrix} 12,46 & -1,723 \\ -1,723 & 1,166 \end{pmatrix},$$

что позволяет определить наименьшее значение критерия качества:

$$\begin{aligned} J^* &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} M \{ (x(t) - \rho(t))^2 + 100u^2(t) \} = \\ &= \text{Tr} \left[ P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \right] = 23,32 \text{ с}^{-2}. \end{aligned}$$

Поэтому можно говорить о том, что среднеквадратическое отклонение выходного сигнала  $x(t)$  от задающего  $\rho(t)$  оказывается меньше  $23,32 \text{ с}^{-2}$ .

### 13.4. ФИЛЬТРЫ КАЛМАНА

Современная теория стохастической фильтрации заложена в 40-х годах XX в. трудами А.Н. Колмогорова и Н. Винера, которые независимо друг от друга использовали процедуры интерполяции и экстраполяции стационарных случайных последовательностей для решения задач измерения параметров траек-



торий летательных аппаратов по радарным данным. Первые результаты теории позволяют синтезировать фильтр с минимальной среднеквадратичной ошибкой на основании интегрального уравнения Винера-Хопфа. Решение этого уравнения предложено Винером искать в частотной области с использованием разложения спектральной плотности на пару зеркально симметричных сомножителей и последующим порождением выходного процесса из белого шума. Предложенная процедура все же очень сложна и область ее применения оказалась довольно узкой.

Дальнейшее развитие теории фильтрации связано с именами Р. Калмана (R. Kalman) и Р. Бьюси (R. Bucy). Ими решена задача фильтрации в пространстве состояний, найдены дискретный, а затем и непрерывный эквиваленты интегрального уравнения Винера-Хопфа в виде матричного разностного и дифференциального уравнений.

Приведем результаты Калмана-Бьюси в виде теоремы и основанной на этой теореме процедуры синтеза фильтра.

Рассматривается дискретная система, которая испытывает стохастические воздействия в виде входного возмущения  $\alpha(k)$  и шума измерений  $\beta(k)$  на выходе:

$$\sum^{(n)}: \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + \alpha(k), & Mx(0) &= 0, \\ y(k) &= Cx(k) + \beta(k). \end{aligned}$$

Предполагается, что случайное начальное состояние, входная помеха и шум измерений являются взаимно не коррелированными случайными процессами типа белый шум с матрицами ковариаций  $S, Q, R$  соответственно.

Необходимо по результатам измерений выхода  $y(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  найти несмещенную оценку фазового вектора  $\underline{x}(k)$  состояния системы, оптимальную в смысле минимума дисперсии ошибки оценивания  $\epsilon(k) = x(k) - \underline{x}(k)$ . Задача синтеза фильтра разрешима, утверждает теорема Калмана-Бьюси.

#### Теорема (R. Kalman, R. Bucy, 1960)

*Фильтр, формирующий линейную несмещенную оценку  $\underline{x}(k)$  с минимальной среднеквадратичной ошибкой для системы  $\sum^{(n)}$  описывается рекуррентным уравнением*

$$\begin{aligned} \underline{x}^*(k+1) &= A\underline{x}(k), & \underline{x}^*(0) &= 0; \\ \underline{x}(k) &= \underline{x}^*(k) + F(k)(y(k) - C\underline{x}^*(k)), \end{aligned}$$

где  $F(k)$  — матрица коэффициентов усиления фильтра, определяется соотношением

$$F(k) = P^*(k)C^T [C P^*(k) C^T + R]^{-1},$$

а матрица  $P(k)$  ковариации ошибки оценивания удовлетворяет уравнению

$$P(k) = P^*(k) - F(k) C P^*(k);$$

$$P^*(k+1) = A P(k) A^T + Q, \quad P^*(0) = S.$$

#### Пример

Тело совершает поступательное движение из достоверно известной начальной точки под действием случайной силы. В дискретные моменты с шагом 1 производятся измерения положения тела. Результаты измерений зашумлены. Дискретная модель движения тела и измерения его положения представляется уравнением:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \alpha(k), & x(0) &= 0; \\ y(k) &= (1 \quad 0)x(k) + \beta(k), \end{aligned}$$

где  $\alpha(k)$  — дискретное случайное воздействие на тело;  $\beta(k)$  — шум в канале измерений.

Положим, что  $\alpha(k)$ ,  $\beta(k)$  — гауссовы дискретные белые шумы с ковариационными матрицами  $Q = \begin{pmatrix} 0,33 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$  и  $R = 1$  соответственно.

В начальный момент времени тело находится в покое, поэтому  $P(0) = 0$ . Следует найти рекуррентный алгоритм фильтра Калмана-Бьюси для определения оценок положения и скорости движения тела.

Матрица коэффициентов усиления фильтра  $F(k) = (f_1(k), f_2(k))^T$ , поэтому рекуррентный алгоритм вычисления оценок вектора состояния принимает вид

$$\begin{aligned}x_1^*(k+1) &= x_1^*(k) + x_2^*(k); \\x_2^*(k+1) &= x_2^*(k), \quad x^*(0) = 0; \\x_1(k) &= (1 - f_1(k))x_1^*(k) + f_1(k)y(k); \\x_2(k) &= -f_2(k)x_1^*(k) + x_2^*(k) + f_2(k)y(k).\end{aligned}$$

На первом шаге находим, что  $P^*(1) = Q(C P^*(k) C^T + R)^{-1} = 0,75$ , поэтому определяем, что  $F(1) = 0,75Q(1 \ 0)^T$ , значит,  $f_1(1) = 0,250$ ;  $f_2(1) = 0,375$ . На этом основании находим оценку вектора состояния системы на первом шаге:

$$x_1(1) = 0,250y(1); \quad x_2(1) = 0,375y(1).$$

На втором шаге находим, что  $P^*(2) = \begin{pmatrix} 2,145 & 1,687 \\ 1,687 & 1,812 \end{pmatrix}$ , затем определяем, что  $F(2) = (0,682 \quad 0,536)^T$ , и, наконец, находим оценку вектора состояния системы:

$$\begin{aligned}x_1(2) &= 0,199y(1) + 0,682y(2); \\x_2(2) &= 0,040y(1) + 0,536y(2).\end{aligned}$$

Далее, находя значения элементов матрицы  $P^*(k)$ ,  $F(k)$ ,  $k = 3, 4, \dots$ , обнаруживаем, что решение стабилизировалось на шестом шаге:  $P^*(6) = P^*(7)$ ,  $F(6) = F(7)$ . Вычисления оценок можно остановить, значение среднеквадратичной ошибки измерения положения составило  $M\varepsilon_{1(6)}^T \varepsilon_{1(6)} = 0,757$ , значение среднеквадратичной ошибки измерения скорости составило  $M\varepsilon_{2(6)}^T \varepsilon_{2(6)} = 1,03$ .

Рассмотрим теперь более сложную в аналитическом смысле задачу синтеза фильтра Калмана-Бьюси для непрерывной системы, которая испытывает стохастические возмущения на входе; результаты измерения ее выхода зашумлены.

$$\sum^{(n)}: \quad \begin{aligned}x'(t) &= Ax(t) + \alpha(t), \quad Mx(0) = 0; \\y(t) &= Cx(t) + \beta(t).\end{aligned}$$

Входное возмущение  $\alpha(t)$  и ошибки измерений  $\beta(t)$  являются случайными процессами типа белый шум с известными матрицами ковариации  $Q$ ,  $R$  соответственно. Начальное состояние системы — случайный вектор с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации  $S$ . Матрицы  $Q$ ,  $R$  симметричны, положительно определенные. Начальное положение, входные возмущения и ошибки измерений взаимно не коррелированы.

Необходимо по результатам измерений выхода  $y(t)$  найти несмещенную оценку фазового вектора  $x(t)$  состояния системы, оптимальную в смысле минимума дисперсии ошибки оценивания  $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ . Задача синтеза разрешима, утверждает теорема Калмана-Бьюси.

**Теорема** (R. Kalman, R. Bucy, 1961)

*Фильтр, формирующий линейную несмещенную оценку вектора состояния  $x(t)$  с минимальной среднеквадратичной ошибкой для системы  $\sum^{(n)}$ , описывается уравнением*

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + F(t)(y(t) - C\hat{x}(t)), \quad \hat{x}(0) = 0,$$

где матрица усиления  $F(t) = P(t)C^T R^{-1}$ , и матрица  $P(t)$  ковариации ошибки оценивания удовлетворяет уравнению Риккати:

$$P'(t) = AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T R^{-1}CP(t) + Q, \quad P(0) = S.$$

Заметим, что если стационарная система  $\sum^{(n)}$  испытывает стационарные стохастические возмущения, то при длительном наблюдении ошибка оценивания вектора состояния системы имеет стационарную матрицу ковариаций  $P$ , которая удовлетворяет алгебраическому уравнению:

$$AP + PA^T - PC^T R^{-1}CP + Q = 0.$$

При вычислении матрицы  $P(t)$  следует учитывать, что она симметрическая и положительно полуопределенная.

### Пример

Пусть в системе

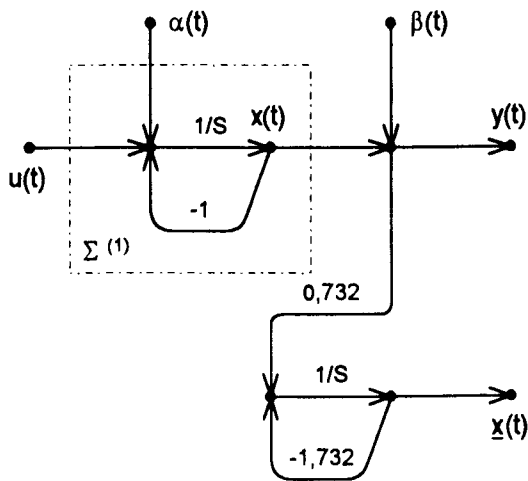
$$\Sigma^{(1)}: \begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + \alpha(t), & Mx(0) = 0; \\ y(t) = x(t) + \beta(t) \end{cases}$$

наблюдается сигнал, который представляется суммой полезного сигнала и помехи  $\beta(t)$ . На вход системы действует случайное возмущение  $\alpha(t)$ . Помеха измерений и входное возмущение являются случайными процессами типа белый шум интенсивности  $R = 1$  и  $Q = 2$  соответственно. Синтезируем непрерывный фильтр Калмана-Бьюси для вычисления несмещенной оценки состояния  $x(t)$  системы.

Параметры системы:  $A = -1$ ,  $C = 1$ ,  $Q = 2$ ,  $R = 1$ , поэтому модель фильтра описывается уравнением

$$\dot{\hat{x}}(t) = -\hat{x}(t) + F(t)(y(t) - \hat{x}(t)), \quad \hat{x}(0) = 0,$$

где матрица усиления  $F(t) = P(t)$ .



Дифференциальное уравнение Риккати для функции  $P(t)$  принимает вид

$$P'(t) = -2P(t) - P^2(t) + 2.$$

Стационарное значение функции  $P(t)$  удовлетворяет алгебраическому уравнению:

$$P^2 + 2P - 2 = 0,$$

Рис. 114

откуда находим, что  $P = 0,732$ . Искомая модель фильтра Калмана-Бьюси принимает вид

$$\dot{\hat{x}}(t) = -1,732\hat{x}(t) + 0,732y(t).$$

Структура фильтра изображена на рис. 114.

## 13.5. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ

**Задача идентификации** динамической системы состоит в получении или уточнении математической модели системы по данным, полученным из эксперимента над этой системой. В общем случае задача идентификации ставится так: для множества сигналов, полученных из эксперимента над системой, необходимо определить математическую модель из заданного класса моделей, которая в известном смысле наилучшим образом аппроксимирует движения реальной системы.

Процедуру идентификации можно представить состоящей из четырех этапов:

- **планирование эксперимента;**
- **определение структуры модели;**
- **определение параметров модели;**
- **верификация найденной модели.**

Эксперименты с динамическими системами сложны, ответственны и стоят достаточно дорого. Существуют специальные математические методы *планирования эксперимента*, позволяющие найти рациональную схему и число экспериментов.

*Выбор структуры модели* осуществляется на основе априорных знаний о системе. Модель может быть выбрана внешней типа "вход – выход" или внутренней в терминах пространства состояний. *Оценивание параметров модели* осуществляется на основе применения математических методов оптимизации к выбранному критерию аппроксимации экспериментальных данных.

*Верификация модели* с найденными оценками параметров проводится путем сравнения реакции модели и реальной системы на общие входные воздействия. Исследуются разности

реакций и чувствительность этих разностей к изменениям параметров модели.

Задача параметрической идентификации имеет место тогда, когда идентифицируемая модель системы известна с точностью до значения параметров.

Классическими методами решения задачи параметрической идентификации линейных стационарных систем являются методы анализа частотных и временных характеристик, методы спектральных и корреляционных функций и, наконец, методы, основанные на принципе **наименьших квадратов Гаусса**.

Формализуем задачу идентификации и используем метод наименьших квадратов для ее решения.

Предположим, что модель динамической системы известна с точностью до параметров, а это означает, что известно множество возможных моделей системы, параметризованное вектором  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$ . Таким образом, определение модели системы сводится к задаче оценивания вектора параметров  $\theta$ .

Пусть в результате эксперимента над динамической системой получены данные

$$\{u_j = u(t_j), y_j = y(t_j), j = 1, 2, \dots, N\},$$

которые определяют состояние входа и выхода системы в синхронные моменты времени. Располагая синхронными парами  $\{(u_j, y_j)\}$ , необходимо найти такие оценки параметра  $\theta$ , при которых выходные координаты полностью определенной модели системы

$$\{y(t_j; \theta), j = 1, 2, \dots, N\},$$

были достаточно близки к имеющимся экспериментальным данным. Близость этих данных будем измерять величиной критерия  $J(\epsilon; \theta)$ , зависящей от ошибки оценивания  $\epsilon(t_j; \theta) = y(t_j) - y(t_j; \theta)$  и параметров. Лучшей моделью из множества возможных будет та, у которой значение критерия будет наименьшим.

Выходные данные модели системы находятся в виде линейной формы от оцениваемых параметров:

$$y(t; \theta) = \Phi^T(u(t))\theta = \sum \varphi_i(u)\theta_i,$$

где  $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))^T$  — известная вектор-функция;  
 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$  — вектор искомых параметров.

Координаты вектора ошибки оценивания  $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N)^T$  находятся из выражения

$$\epsilon_j = \epsilon(t_j; \theta) = y_j - \Phi^T(t_j)\theta, \quad j = 1, \dots, N.$$

Критерий точности оценок или меру правильности выбранной модели зададим в виде квадратичной формы:

$$J(\epsilon; \theta) = 0,5 \epsilon^T \epsilon.$$

Введем в рассмотрение вектора

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T;$$

$$\Phi(t_j) = (\varphi_1(t_j), \varphi_2(t_j), \dots, \varphi_n(t_j))^T, \quad j = 1, \dots, N$$

и матрицу

$$\Phi = (\varphi_i(t_j)), \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, N;$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi(t_1) \\ \dots \\ \Phi(t_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots & \varphi_n(t_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(t_N) & \varphi_2(t_N) & \dots & \varphi_n(t_N) \end{pmatrix}.$$

Теперь выражение для вычисления выхода модели системы и ошибки оценки в матричной форме принимает вид

$$y = \Phi\theta, \quad \epsilon = y - \Phi\theta.$$

Задача идентификации параметров модели системы состоит в том, чтобы найти такое значение параметра  $\theta$ , при котором реакция выбранной модели системы максимально близко совпадает с реакцией реальной системы на один и тот же входной сигнал:

$$J(\epsilon; \theta) = 0,5\epsilon^T\epsilon \rightarrow \min_{\theta}.$$

Найдем решение этой задачи оптимизации, для чего преобразуем выражение критерия:

$$\begin{aligned} 2J(\varepsilon; \theta) &= (\mathbf{y} - \Phi\theta)^T (\mathbf{y} - \Phi\theta) = \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \Phi\theta - (\Phi\theta)^T \mathbf{y} + (\Phi\theta)^T (\Phi\theta) = \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} + \theta^T \Phi^T \Phi\theta + \theta^T (-\Phi^T \mathbf{y}) + (-\Phi^T \mathbf{y})^T \theta. \end{aligned}$$

Обозначив в этом выражении  $-\Phi^T \mathbf{y} = \mathbf{z}$ ,  $\Phi^T \Phi = \mathbf{S}$ , получим

$$2J(\varepsilon; \theta) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} + (\theta^T \mathbf{S}\theta + \theta^T \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \theta) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} + J_1(\theta).$$

Очевидно, что критерий  $J(\varepsilon; \theta)$  достигает своего минимального значения вместе с выражением, стоящим в скобках и обозначенное  $J_1(\theta)$ , поскольку  $\mathbf{y}^T \mathbf{y}$  неотрицательно. Дополним до полного квадрата часть выражения  $J_1(\theta)$ :

$$\begin{aligned} J_1(\theta) &= \theta^T \mathbf{S}\theta + \theta^T \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \theta + (\mathbf{z}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z}) = \\ &= (\theta + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z})^T \mathbf{S} (\theta + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z}) - \mathbf{z}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Поскольку матрица  $\mathbf{S} = \Phi^T \Phi$  является положительно определенной и симметрической, то квадратичная форма  $-\mathbf{z}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z}$  также оказывается положительно определенной, но тогда минимум  $J_1(\theta)$  будет достигаться при  $\theta + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{0}$ , что возможно, когда  $\underline{\theta}^* = -\mathbf{S}^{-1} \mathbf{z}$ . Таким образом, искомая оптимальная оценка вектора параметров  $\theta^*$  удовлетворяет соотношению

$$\underline{\theta}^* = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y}.$$

Найденное соотношение можно применять для решения задачи параметрической идентификации при использовании как внутренней, так и внешней модели системы.

## Примеры

1. Идентифицируется динамическая система, для которой предполагается в качестве математической модели выбрать модель из двухпараметрического множества внешних моделей первого порядка:

$$W(s; k, T) = K/(Ts + 1), \quad \theta = (K, T)^T.$$

Экспериментальные данные реальной системы представляют собой последовательность:

$$y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N); \quad u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_N).$$

Выходная переменная модели предполагается линейной формой от параметров:

$$\underline{y}(t_j) = -T_y(t_{j-1}) + Ku(t_{j-1}), \quad j = 2, 3, \dots, N$$

или в матричной записи:

$$\begin{aligned} \underline{y}(t_j) &= \Phi^T(t_j)\theta; \\ \Phi(t_j) &= (-y(t_{j-1}) \quad u(t_{j-1}))^T, \quad j = 2, 3, \dots, N. \end{aligned}$$

Ошибка оценивания определяется разностью  $\varepsilon(t_j) = y(t_j) - \underline{y}(t_j)$ , а критерий точности:

$$J(\varepsilon; \theta) = 0,5\varepsilon^T \varepsilon = 0,5 \sum \varepsilon^2(t_j), \quad j = 2, 3, \dots, N.$$

Вектор выходных данных и вектор ошибок оценивания принимают вид

$$\underline{\mathbf{y}} = (y(t_2), y(t_3), \dots, y(t_N))^T; \quad \underline{\varepsilon} = (\varepsilon(t_2), \varepsilon(t_3), \dots, \varepsilon(t_N))^T.$$

Искомый вектор параметров находим из выражения

$$\underline{\theta}^* = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y},$$

$$\text{где} \quad \Phi = (\Phi(t_1), \Phi(t_2), \dots, \Phi(t_{N-1}))^T = \begin{pmatrix} -y(t_1) & u(t_1) \\ -y(t_2) & u(t_2) \\ \dots & \dots \\ -y(t_{N-1}) & u(t_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

$$\Phi^T \Phi = \begin{pmatrix} \sum y^2(t_j) & -\sum y^2(t_j)u(t_j) \\ -\sum y(t_j)u(t_j) & \sum u^2(t_j) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\Phi^T y = (-\sum y(t_j)y(t_{j+1}), \sum y(t_{j+1})u(t_j))^T, \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

2. Идентифицируется динамическая система, для которой предполагается в качестве математической модели выбрать модель из  $2n$ -параметрического множества внешних моделей  $n$ -го порядка:

$$W(s; \alpha, \dots, \beta) = (\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta^n) /$$

$$/(s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n);$$

$$\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^T.$$

Экспериментальные данные реальной системы представляют собой последовательность входных и выходных данных:

$$y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N); \quad u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_N).$$

Функции

$$\varphi(t_{j+1}) = (-y(t_j), -y(t_{j-1}), \dots, -y(t_{j-n+1}), u(t_j), u(t_{j-1}), \dots, u(t_{j-n+1}))^T,$$

поэтому

$$\Phi = (\varphi(t_{n+1}), \varphi(t_{n+2}), \dots, \varphi(t_N))^T =$$

$$= \begin{pmatrix} -y(t_n), & -y(t_{n-1}), & \dots, & -y(t_1), & u(t_n), & u(t_{n-1}), & \dots, & u(t_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(t_{N-1}), & -y(t_{N-2}), & \dots, & -y(t_{N-n}), & u(t_{N-1}), & u(t_{N-2}), & \dots, & u(t_{N-n}) \end{pmatrix},$$

что позволит определить искомый вектор параметров.

Параметрический метод идентификации может быть существенно улучшен, если находить оценки параметров системы по мере поступления результатов эксперимента, не дожидаясь окончания всего эксперимента. Такие методы называют **рекурсивными методами идентификации**. Если  $\underline{\theta}(N)$  — средне-

квадратичная оценка параметров, полученная для  $N$  наблюдений и матрица  $\Phi^T(N)\Phi(N)$  не вырождена и положительно определена, то

$$\underline{\theta}(N+1) = \underline{\theta}(N) + K(N)[y(k+1) - \varphi(N+1)\underline{\theta}(N)],$$

$$\text{где } K(N) = P(N+1)\varphi^T(N+1) =$$

$$= P(N)\varphi^T(N+1)[1 + \varphi(N+1)P(N)\varphi^T(N+1)]^{-1};$$

$$P(N+1) = \{E - K(N)\varphi(N+1)\}P(N).$$

## 13.6. УПРАЖНЕНИЯ

1. Осуществить синтез замкнутой системы стабилизации, если ее внутренняя модель представлена уравнением

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} u(t) + \mu(t),$$

где  $\mu(t)$  — белый шум интенсивностью 4.

Синтез осуществить так, чтобы минимизировать критерий качества управления:

$$M \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + 25u^2(t)] dt.$$

Определить реакцию замкнутой системы на начальное смещение  $x(0) = (0,5 \ 0)^T$ .

2. Для системы

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,8 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \beta(t),$$

где  $\beta(t)$  — шум с автокорреляционной функцией:

$$R_{\beta}(\tau) = 40 \exp(-0,2|\tau|),$$

найти управление, наилучшее в смысле:

$$а) \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + 0,01u^2(t)]dt;$$

$$б) \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + 100u^2(t)]dt.$$

3. Синтезировать фильтр Винера для выделения полезного сигнала  $u(t)$  на фоне значительно более мощного белого шума  $m(t)$ , если известна спектральная плотность полезного сигнала.

4. Осуществить фильтрацию стохастического входного сигнала  $u(t)$  на фоне аддитивной помехи  $\beta(t)$ , используя фильтр Винера, если:

$$а) S_u(\omega) = 16/(\omega^2 + 16); \quad S_{\beta}(\omega) = 0,1;$$

$$б) S_u(\omega) = 4/(\omega^2 + 4); \quad S_{\beta}(\omega) = \omega^2/(\omega^2 + 4);$$

$$в) S_u(\omega) = 1/(\omega^2 + 1); \quad S_{\beta}(\omega) = 1/(\omega^2 + 1).$$

Найти величину минимального среднего квадрата ошибки воспроизведения входного сигнала.

5. На вход линейного звена  $x'(t) = -4x(t) + \mu(t)$  воздействует белый шум  $\mu(t)$  интенсивностью  $a^2$ . Производятся измерения выходной переменной звена. Измерения  $z(t) = x(t) + \beta(t)$  содержат аддитивную помеху  $\beta(t)$ , которую рассматривают как независимый от входа белый шум интенсивностью  $b^2$ .

Синтезировать фильтр Калмана-Бьюси для получения наилучшей в смысле минимума среднего квадрата ошибки оценки сигнала  $x(t)$ .

6. Рассматривается система

$$x'_1(t) = x_2(t);$$

$$x'_2(t) = -4x_1(t) - 4x_2(t) + \mu(t),$$

на которую воздействует белый шум интенсивностью  $a^2$ . Производятся измерения сигнала  $x_2(t)$ . Измерения  $z(t) = x(t) + \beta(t)$  содержат помеху  $\beta(t)$ , которую рассматривают как независимый от входа белый шум интенсивностью  $b^2$ . Составить уравнение Риккати и осуществить синтез стационарного фильтра Калмана-Бьюси.

7. Наблюдается стохастический сигнал в виде суммы  $z(t) = x(t) + \beta(t)$  полезного сигнала  $x(t)$  и помехи в виде белого шума  $\beta(t)$ . Спектральные плотности этих случайных процессов равны

$$S_u(\omega) = 2/(\omega^2 + 1); \quad S_{\beta}(\omega) = 1.$$

Выполнить процедуры синтеза фильтров Винера и Калмана-Бьюси. Показать, что передаточная функция фильтра Винера имеет вид

$$W(s) = 0,422/(0,578s + 1),$$

а структура фильтра Калмана-Бьюси определяется уравнением

$$\underline{x}'(t) = -1,73\underline{x}(t) + 0,73z(t).$$

Убедитесь в том, что результаты совпадают.

8. Показать, что фильтр Калмана для дискретной системы

$$x(k+1) = -0,6x(k) + \mu(k), \quad y(k) = 1,4x(k) + \mu(k), \quad k = 1, 2, \dots$$

имеет структуру, которая описывается уравнением

$$\underline{x}(k+1|k) = -0,8\underline{x}(k|k-1) - y(k).$$

9. Для системы

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k) + \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1 \end{pmatrix} \mu(k), \quad x(0) = 5,$$

$$y(k) = (0 \quad 1)x(k),$$

где  $\mu(k)$  — белый шум интенсивностью 0,2. Найти, располагая значениями  $\{y(k)\}$ , наилучшую в смысле среднего квадрата оценку состояния системы на шаге  $k = 3$ .

10. Рассматривается объект с моделью

$$y(k) - ay(k-1) = bu(k-1) + \beta(k),$$

где  $a = 0,855$ ;  $b = 1,2$ ;

$\beta(k)$  — случайный процесс с единичной дисперсией;

$u(k)$  — последовательность псевдослучайных двоичных импульсов единичной амплитуды.

Выполнить рекурсивную идентификацию системы, для чего следует найти, используя рекурсивный алгоритм, оценки параметров  $a$ ,  $b$ . Положим, что  $a(0) = b(0) = 0$  и  $P(0) = 10E$ .

*Часть третья*

# **ОПТИМАЛЬНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ**



# 14 СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ЗАДАННОМУ КРИТЕРИЮ

*Вариационные методы оптимального управления — Процедура принципа максимума Понтрягина — Метод динамического программирования Беллмана — Системы, оптимальные по квадратичному критерию — Системы, оптимальные по быстродействию — Субоптимальные системы и системы с переменной структурой — Упражнения.*

**Задача оптимального управления системой**

$$\Sigma^{(n)}: x' = f(x, u), x(0)$$

состоит в том, чтобы с помощью *допустимого управления*  $u(t) \in U^m$  изменить состояние этой системы из некоторого начального  $x(0)$  в некоторое конечное  $x(T)$ , расположенное в *целевом множестве состояний*  $X^n$ , так, чтобы *критерий качества управления*  $J(u)$  принял минимально возможное значение. При этом найденное управление  $u^*(t)$  называют *оптимальным управлением* и траекторию движения системы  $x^*(t)$ , соответствующую этому управлению, — *оптимальной траекторией*. Время движения  $T$  может быть *свободным* или *фиксированным*.

Выбор критерия качества управления не является формальным актом, критерий не предписывается какой-либо теорией, он полностью определяется содержанием задачи управления. Часто критерий оптимальности принимают в виде функционала:

$$J(u, x, T) = \Phi(x(T), T) + \int_0^T F(t, x(t), u(t)) dt,$$

•  
14. СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ,  
ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ЗАДАННОМУ КРИТЕРИЮ

•  
15. СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ  
С АДАПТАЦИЕЙ

где  $\Phi(x(T), T)$  — *терминальный функционал*, характеризующий качество управления на момент достижения цели или на момент окончания движения;  $F(t, x, u)$  — *целевая функция*, определяющая интегральный функционал.

Вид критерия  $J(u, x, T)$  задает класс задач оптимальности. Так, например:

- *задача оптимального быстродействия* имеет место тогда, когда  $\Phi(x(T), T) \equiv 0$ ,  $F(t, x, u) \equiv 1$ ;
- *задача предельной точности* — когда  $\Phi(x(T), T) \equiv 0$ ,  $F(t, x, u) \equiv x^T R x$ ;
- *задача минимума энергии* —  $\Phi(x(T), T) \equiv 0$ ,  $F(t, x, u) \equiv u^T Q u$ ;
- *задача минимума расхода* —  $F(t, x, u) \equiv Q|u|$ ;
- *задача предельной точности при минимуме энергии* —  $F(t, x, u) \equiv x^T R x + u^T Q u$ ;
- *задача терминального управления* —  $\Phi(x(T), T) \neq 0$ ,  $F(t, x, u) \equiv 0$ .

Задачи, для которых

$$J(u, x, T) = \int_0^T F(t, x, u) dt,$$

называют *задачами* оптимального управления *в форме Лагранжа*;

задачи с критерием общего вида называют *задачами в форме Больца*;

терминальные задачи называют *задачами в форме Майера*.

Задачи оптимального управления являются задачами минимизации на множестве функций. В некоторых случаях эти задачи могут быть решены методами *классического вариационного исчисления*. Однако чаще всего задачи оптимального управления ставятся как задачи минимизации при ограничениях на состояния или функцию управления. Для таких задач эффективными методами являются методы неклассического вариаци-

онного исчисления, к которым относятся *принцип максимума* Л.С. Понтрягина, метод *динамического программирования* Р. Беллмана, *метод моментов* Н.Н. Красовского.

## 14.1. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

• Простейший класс задач *оптимизации функций* состоит в отыскании не стесненного никакими ограничениями вектора  $x$ , который минимизирует функцию  $F(x)$ :

$$\min F(x).$$

*Достаточными условиями* решения таких задач являются соотношение  $\partial F(x)/\partial x = 0$  и положительная определенность *матрицы Гессе*  $\partial^2 F(x)/\partial x^2$ .

• Более общий класс задач оптимизации функций составляют задачи с ограничениями, когда необходимо найти вектор  $x$ , который минимизирует функцию  $F(x)$  и при этом удовлетворяет функциональному соотношению  $f(x) = 0$ :

$$\begin{aligned} \min F(x). \\ f(x) = 0 \end{aligned}$$

Для решения этих задач используется *метод множителей Лагранжа*.

*Необходимыми условиями* минимизации являются соотношения

$$\begin{aligned} \partial L(x, \lambda)/\partial x &= 0; \\ \partial L(x, \lambda)/\partial \lambda &= f(x) = 0, \end{aligned}$$

где  $L(x, \lambda) = F(x) + \lambda^T f(x)$  — функция Лагранжа;  $\lambda$  — вектор множителей Лагранжа.

### Примеры

1. Функция  $F(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$  имеет стационарную точку  $x^* = (0 \ 0)^T$ , поскольку система алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\partial F(x)/\partial x_1 &= 2x_1 - 2x_2 = 0; \\ \partial F(x)/\partial x_2 &= -2x_1 + 8x_2 = 0\end{aligned}$$

имеет единственное решение. Матрица Гессе

$$\partial^2 F(x)/\partial x^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

имеет два положительных собственных числа и поэтому является положительно определенной. Достаточные условия минимума в точке  $x^*$  выполнены.

2. Найти стационарные точки функции  $F(x) = 0,5(x_1^2 + 4x_2^2)$  при линейном ограничении на переменные  $f(x) = x_1 + 2x_2 - 1 = 0$ .

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = 0,5(x_1^2 + 4x_2^2) + \lambda(x_1 + 2x_2 - 1).$$

Необходимые условия минимума принимают вид

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 1 &= 0; \\ \partial L(x, \lambda)/\partial x_1 &= x_1 + \lambda = 0; \\ \partial L(x, \lambda)/\partial x_2 &= 4x_2 + 2\lambda = 0.\end{aligned}$$

Эти три алгебраических уравнения с тремя неизвестными имеют единственное решение:  $\lambda = -0,5$ ;  $x = (0,5 \quad 0,25)^T$ .

• Задачи **минимизации функционалов** решаются методами классического вариационного исчисления. Необходимыми условиями того, что функция  $x(t)$ , удовлетворяющая граничным условиям  $x(0) = x^0$ ,  $x(T) = x^*$ , доставляет минимум интегральному функционалу

$$J = \int_0^T F(x, x', t) dt$$

являются **дифференциальные уравнения Эйлера-Лагранжа**:

$$\partial F/\partial x - d/dt(\partial F/\partial x') = 0.$$

Для частного случая, когда целевая функция явно не зависит от времени  $F(x, x')$ , уравнения Эйлера-Лагранжа принимают вид

$$F - x' \partial F/\partial x' = \text{const}.$$

В отличие от задач минимизации функций, когда необходимые условия представляют собой алгебраические уравнения, необходимые условия минимизации функционалов представляются дифференциальными уравнениями относительно неизвестной функции.

• Задачи **оптимального управления динамическими системами** являются задачами минимизации функционалов с ограничениями, которые накладываются на переменные состояния и управление. Эти ограничения задаются уравнением движения:

$$x' = f(x, u, t).$$

Для решения таких задач используется метод множителей Лагранжа, в котором предполагается использование вспомогательного функционала:

$$L(x, u, \lambda) = F(x, x', t) + \lambda^T(t)(f(x, u, t) - x'),$$

где  $\lambda(t)$  — вектор множителей Лагранжа, зависящий от времени.

Необходимые условия минимизации интегрального функционала представляются уравнениями Эйлера-Лагранжа относительно вспомогательного функционала  $L(x, u, \lambda)$ .

## Примеры

1. Найти диаграмму тока, при котором имеет место минимум потерь в якорной цепи электродвигателя при разгоне за время  $T$  со скорости  $\omega_0$  до скорости  $\omega_1$  при постоянном моменте сопротивления  $M_c$ .

Количество тепла, выделяющегося в якорной обмотке электродвигателя за время  $T$ , определяется интегралом от квадрата тока. Воспользуемся внешним уравнением

$$G\omega' = ki - M_c$$

электропривода с известным приведенным моментом инерции  $G$ , чтобы составить функционал, пропорциональный тепловым потерям в якорной цепи:

$$J = \int_0^T (\omega' + M_c/G)^2 dt.$$

Найдем для составления необходимых условий минимума в форме уравнения Эйлера составляющие  $\partial F/\partial \omega = 0$ ,  $\partial F/\partial \omega' = 2(\omega' + k)$ , тогда исконое уравнение примет вид:  $\omega''(t) = 0$  с граничными условиями  $\omega(0) = \omega_0$ ,  $\omega(T) = \omega_1$ . Решение этой двухточечной краевой задачи  $\omega(t) = C_1 t + C_2$  найдем после определения двух постоянных:  $\omega(0) = C_2 = \omega_0$ ,  $\omega(T) = C_1 T + C_2 = \omega_1$ . Следовательно,  $C_1 = (\omega_1 - \omega_0)/T$ ,  $C_2 = \omega_0$  и поэтому частота вращения должна изменяться линейно:

$$\omega(t) = (\omega_1 - \omega_0)t/T + \omega_0.$$

При этом искомая диаграмма тока:

$$i(t) = G(\omega_1 - \omega_0)/(kT) + M_c/k.$$

Для обеспечения минимальных тепловых потерь ток в якорной цепи электродвигателя должен быть неизменным.

2. Пусть динамическая система, имеющая модель состояния

$$x'_1 = x_2; \quad x'_2 = -x_1 + u,$$

характеризуется интегральным показателем качества:

$$J = \int_0^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + 0,1u^2) dt.$$

Необходимо найти управление, которое переводило бы эту систему из состояния  $x(0)$  в состояние  $x(\infty) = 0$  так, чтобы минимизировать показатель качества.

Составим вспомогательный функционал Лагранжа:

$$L(x, u, \lambda) = (x_1^2 + x_2^2 + 0,1u^2) + \lambda_1(x_2 - x'_1) + \lambda_2(x_1 + u - x'_2),$$

где  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T$  — вектор множителей Лагранжа, зависящий от времени.

Полная система дифференциальных уравнений для определения неизвестных  $x, u, \lambda$  принимает вид

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -x_1 + u;$$

$$\lambda'_1 = \lambda_2 + 2x_1, \quad \lambda'_2 = -\lambda_1 + 2x_2;$$

$$u = 2\lambda_2.$$

После исключения переменной  $u$  из первого уравнения имеем систему из четырех линейных дифференциальных однородных уравнений относительно четырех неизвестных:  $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ . Характеристическое уравнение этой системы  $\mu^4 - 8\mu^2 + 11 = 0$  имеет корни  $\mu_{1,2} = \pm 2,5$ ,  $\mu_{3,4} = \pm 1,7$ .

Поэтому

$$x_1 = C_1 e^{-2,5t} + C_2 e^{-1,7t} + C_3 e^{2,5t} + C_4 e^{1,7t}.$$

Воспользуемся граничными условиями для определения постоянных: для состояния  $x(\infty) = 0$  необходимо, чтобы  $C_3 = C_4 = 0$ , поэтому

$$x_1 = C_1 e^{-2,5t} + C_2 e^{-1,7t};$$

$$x_2 = -2,5C_1 e^{-2,5t} - 1,7C_2 e^{-1,7t}.$$

Кроме того, находим, что

$$C_1 e^{-2,5t} = -0,125(1,7x_1 + x_2);$$

$$C_2 e^{-1,7t} = 0,125(2,5x_1 + x_2).$$

Найдем исконое управление, для чего вычислим

$$u(t) = x'_2(t) + x_1(t) = 7,25C_1 e^{-2,5t} + 3,89C_2 e^{-1,7t} = -3,25x_1(t) - 4,2x_2(t).$$

## 14.2. ПРОЦЕДУРА ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

Принцип максимума был постулирован Л.С. Понтрягиным в виде единого метода, позволяющего решать самые разнообразные задачи оптимального управления. Методологию принципа покажем на примере частной задачи оптимального управления — задачи Лагранжа с известной целью, но свободным временем движения.

Рассматривается система  $\Sigma^n: \dot{x} = f(x, u), x(0)$ , которую необходимо перевести с помощью допустимого управления  $u(t) \in U^m$  из  $x(0) = x^0$  в заданную точку  $x(T) = x^*$  так, чтобы функционал качества

$$J(u) = \int_0^T F(x, u) dt$$

достигал минимума. Время движения не фиксировано.

Рассмотрим, следуя методу, вспомогательный вектор состояния:

$$\underline{\psi} = (\psi_0, \psi = (\psi_1, \dots, \psi_n))^T,$$

который определяется системой уравнений:

$$\dot{\psi}_0 = 0, \quad \dot{\psi} = -(\text{grad } f(x, u))^T \psi.$$

Обе системы (основную и вспомогательную) можно объединить с использованием **функции Гамильтона**:

$$H(\psi_0, \psi, x, u) = \psi_0 F(x, u) + \psi^T f(x, u).$$

В самом деле,  $\dot{x} = \partial H / \partial \psi, \quad \dot{\psi} = -\partial H / \partial x$ .

Для данной задачи **принцип максимума** определяет необходимое условие оптимальности управления и это условие формулируется теоремой [6], которую приводим без доказательства.

**Теорема (Л.С. Понтрягин, 1956)**

Для того чтобы допустимое управление  $u^*(t)$  и соответствующая ему траектория  $x^*(t)$  были оптимальными для данной задачи, необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции  $\underline{\psi}^*(t)$ , отвечающей  $u^*(t)$  и  $x^*(t)$ , что:

а) в любой момент времени, когда  $u^*(t)$  непрерывна, функция  $H^*(\psi_0^*, \psi^*, x^*, u)$  принимает на  $u^*(t)$  максимальное значение:

$$H^*(\psi^*, x^*) = \max_{u(t) \in U} H^*(\psi_0^*, \psi^*, x^*, u);$$

б) в любой момент времени  $\dot{\psi}_0^* = -1$  и  $H^*(\psi^*(t), x^*(t)) = 0$ .

Конструктивный вид этой теоремы позволяет построить алгоритмическую процедуру определения оптимального управления. Так, для задачи оптимального управления в форме Лагранжа с закрепленными концами и свободным временем движения необходимо:

1) составить гамильтониан системы:

$$H(\psi, x, u) = -F(x, u) + \psi^T f(x, u);$$

2) максимизировать гамильтониан по  $u(t) \in U^m$ :

$$\max_{u(t) \in U} H(\psi^*, x^*, u) = H^*(\psi^*, x^*),$$

при этом определить управление как функцию вектора состояния и вспомогательной переменной:

$$u^* = u(\psi^*, x^*);$$

3) составить систему однородных дифференциальных уравнений для вспомогательной переменной:

$$\dot{\psi} = -\partial H / \partial x;$$

4) для определения оптимального управления  $u^*$  как функции времени решить систему 3), но для этого необходимы начальные условия вектора  $\psi$ , которые неизвестны. Однако в задаче с фиксированными концами известны два крайних значения вектора состояния системы:  $x(0)$ ,  $x(T) = x^*$ , что позволяет, используя численные методы, найти искомое решение такой **двухточечной краевой задачи**.

Для задачи с подвижными концами вместо граничных условий добавляется **условие трансверсальности**. Так, если имеет место задача с подвижным правым концом, движение должно завершиться на многообразии  $M(x)$  размерности  $r$ , то условие трансверсальности состоит в том, чтобы вектор  $\psi(T)$  был ортогонален в точке  $x^*(T)$  касательной плоскости к многообразию  $M(x)$ . Это означает, что для любого вектора  $z$  из этой касательной плоскости выполняется соотношение ортогональности  $\psi^T(T)z = 0$ . Условие трансверсальности позволяет составить  $r$  независимых соотношений относительно недостающих координат правого конца оптимальной траектории.

## Примеры

### 1. Задача максимального быстродействия.

Система

$$\Sigma^2: x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad x(0)$$

должна быть максимально быстро переведена из известного состояния  $x(0)$  в начало координат с помощью ограниченного управления  $u(t) \in U^m = [-1, 1]$ .

Составим гамильтониан системы для данной задачи:

$$H(\psi, x, u) = -1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Максимум этого выражения по  $u$  при условии  $|u| \leq 1$  будет иметь место тогда, когда

$$u^*(t) = \operatorname{sgn} \psi_2(t).$$

Вектор вспомогательных переменных удовлетворяет уравнениям

$$\psi'_1 = 0; \quad \psi'_2 = \psi_1,$$

поэтому

$$\psi_2(t) = \beta - \alpha t,$$

где  $\alpha, \beta$  — постоянные.

Оптимальное управление  $u^*(t) = \operatorname{sgn}(\beta - \alpha t)$  оказывается кусочно-постоянной функцией, принимающей не более двух значений, которая может менять знак не более одного раза.

### 2. Задача управления с минимумом расхода.

Система

$$\Sigma^2: x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad x(0)$$

должна быть переведена из известного состояния  $x(0)$  в начало координат с помощью ограниченного управления  $u(t) \in U^m = [-1, 1]$  так, чтобы минимизировать функционал

$$J(u) = \int_0^T |u| dt.$$

Гамильтониан системы для данной задачи принимает вид

$$H(\psi, x, u) = -|u| + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Максимум этого выражения по  $u$  при условии  $|u| \leq 1$  будет иметь место тогда, когда

$$u^*(t) = \text{dez } \psi_2(t) = \begin{cases} 0, & |\psi_2| \leq 1 \\ \text{sgn } \psi_2(t), & |\psi_2| > 1. \end{cases}$$

Вектор вспомогательных переменных удовлетворяет уравнениям

$$\psi'_1 = 0; \quad \psi'_2 = \psi_1,$$

поэтому оптимальное управление  $u^*(t) = \text{dez}(\beta - \alpha t)$  оказывается трехзначной кусочно-постоянной функцией, принимающей значения  $\pm 1, 0$ .

### 3. Задача управления с минимумом энергии.

Система

$$\Sigma^2: \quad x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad x(0)$$

должна быть переведена из известного состояния  $x(0)$  в начало координат с помощью ограниченного управления  $u(t) \in [-1, 1]$  так, чтобы минимизировать функционал:

$$J(u) = \int_0^T u^2 dt.$$

Гамильтониан системы для данной задачи принимает вид

$$H(\psi, x, u) = -u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Максимум этого выражения по  $u$  при условии  $|u| \leq 1$  будет иметь место тогда, когда

$$u^*(t) = \text{sat } \psi_2(t) = \begin{cases} \psi_2, & |\psi_2| \leq 1 \\ \text{sgn } \psi_2(t), & |\psi_2| > 1. \end{cases}$$

Вектор вспомогательных переменных по-прежнему удовлетворяет уравнениям

$$\psi'_1 = 0; \quad \psi'_2 = \psi_1,$$

поэтому оптимальное управление  $u^*(t) = \text{sat}(\beta - \alpha t)$ .

### 4. Задача предельного быстрогодействия для линейных систем.

Система

$$\Sigma^n: \quad x' = Ax + Bu, \quad x(0)$$

должна быть переведена из известного состояния  $x(0)$  в начало координат с помощью ограниченного управления  $u(t) \in U^m$ , где  $U^m$  —  $m$ -мерный единичный куб.

Гамильтониан системы для данной задачи принимает вид

$$H(\psi, x, u) = -1 + \psi^T (Ax + Bu).$$

Максимум этого выражения по  $u$  при условии  $u(t) \in U^m$  будет иметь место тогда, когда

$$u^*(t) = \text{SGN}(B^T \psi).$$

Вектор вспомогательных переменных удовлетворяет системе уравнений:

$$\psi' = -A^T \psi,$$

сопряженной с основной системой.

Теорема Понтрягина, на основе которой получено выражение для оптимального управления  $u^*(t) = \text{SGN}(B^T \psi)$ , формулирует для линейной системы  $\Sigma^n$  не только *необходимые, но и достаточные условия*. Из существования оптимального управления следует его единственность.

Для линейной системы  $\Sigma^n: x' = Ax + Bu$  с действительными собственными числами число переключений каждой компоненты оптимального управления  $u^*(t)$  не превосходит  $(n - 1)$ . Этот результат известен как *теорема Беллмана-Фельдбаума*.

### 14.3. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БЕЛЛМАНА

Динамическое программирование как метод решения задач оптимального управления основывается на **принципе оптимальности** (Р. Беллман, 1957):

*Каковы бы ни были первоначальные состояния системы и управление в начальный момент, последующее управление должно быть оптимальным относительно состояния, получающегося в результате первого управления.*

Пусть для управляемой системы  $\Sigma^n: \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(t_0)$  поставлена задача оптимального управления в форме Лагранжа: найти допустимое управление  $\mathbf{u}(t) \in U^m$ , которое минимизировало бы интегральный критерий качества движения:

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{x}, T) = \int_{t_0}^T F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt.$$

Конечное состояние  $\mathbf{x}(T)$  системы не задано.

Предположим, что задача решена и найдена оптимальная траектория движения системы. Функционал качества движения при фиксированном  $T$  оказывается зависящим от  $\mathbf{x}^0, t_0, \mathbf{u}$ , однако на оптимальной траектории — только лишь от  $\mathbf{x}^0, t_0$ . Обозначим минимальное значение функционала вдоль оптимальной траектории через

$$S(\mathbf{x}^0, t_0) = \min_{\mathbf{u}(t) \in U} \left[ \int_{t_0}^T F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \right].$$

Для произвольного момента времени  $t_1 \in [t_0, T]$  это выражение можно представить в виде суммы:

$$S(\mathbf{x}^0, t_0) = \min_{\mathbf{u}(t) \in U} \left[ \int_{t_0}^{t_1} F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt + \int_{t_1}^T F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \right],$$

которую согласно принципу оптимальности Беллмана теперь можно записать так:

$$S(\mathbf{x}^0, t_0) = \min_{\mathbf{u}(t) \in U} \left[ \int_{t_0}^{t_1} F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt + S(\mathbf{x}^1, t_1) \right],$$

где  $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}(t_1)$  — состояние системы в момент  $t_1$ .

Пусть  $t_1 = t_0 + \Delta t$ , тогда, очевидно,  $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \Delta \mathbf{x}$ . Разложим функцию  $S(\mathbf{x}^1, t_1)$  в окрестности точки  $(\mathbf{x}^0, t_0)$  в ряд Тейлора, для чего предположим существование у этой функции непрерывных частных производных по всем ее аргументам:

$$S(\mathbf{x}^1, t_1) = S(\mathbf{x}^0, t_0) + \mathbf{grad}^T S(\mathbf{x}^0, t_0) \Delta \mathbf{x} + (\partial S(\mathbf{x}^0, t_0) / \partial t) \Delta t + o(\Delta t),$$

где  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}^0, \mathbf{u}(t_0)) \Delta t + o(\Delta t)$ ,

поэтому

$$S(\mathbf{x}^1, t_1) = S(\mathbf{x}^0, t_0) + [\mathbf{grad}^T S(\mathbf{x}^0, t_0) \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}^0, \mathbf{u}(t_0)) + \partial S(\mathbf{x}^0, t_0) / \partial t] \Delta t + o(\Delta t).$$

Воспользуемся этим выражением для вычисления  $S(\mathbf{x}^0, t_0)$ :

$$S(\mathbf{x}^0, t_0) = \min_{\mathbf{u}(t) \in U} [F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + S(\mathbf{x}^0, t_0) + \mathbf{grad}^T S(\mathbf{x}^0, t_0) \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}^0, \mathbf{u}(t_0)) + \partial S(\mathbf{x}^0, t_0) / \partial t] \Delta t + o(\Delta t).$$

Если удалить из скобок за знак  $\min$  члены, не зависящие от управления  $\mathbf{u}(t)$ , и перейти к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим выражение, справедливое не только для  $t_0$ , но и для любого текущего момента времени  $t \in [t_0, T]$ :

$$\min_{\mathbf{u}(t) \in U} [F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{grad}^T S(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t))] + \partial S(\mathbf{x}, t) / \partial t = 0.$$



Это выражение, справедливое не только для  $t_0$ , но и для любого текущего момента времени  $t \in [t_0, T]$ , называют **уравнением Беллмана**.

Уравнение Беллмана, которое составляет необходимое условие оптимальности управления  $u(t)$ , является нелинейным уравнением первого порядка в частных производных относительно  $S(x, t)$ . Необычность этого уравнения в том, что оно содержит операцию минимизации. Регулярных аналитических методов решения таких уравнений нет. Однако после выполнения операции минимизации, в результате которой определяется оптимальное управление  $u^*$  как функция от  $\partial S(x, t)/\partial x$ , это уравнение становится обычным уравнением в частных производных:

$$F(t, x^*, u^*) + \text{grad}^T S(x^*, t) f(t, x^*, u^*) + \partial S(x^*, t)/\partial t = 0$$

с одним граничным условием:  $S(x^*, T) = 0$ . Решением этого уравнения является функция  $S(x, t)$ , которую используем для вычисления функции оптимального управления  $u^*(t)$ .

Суммируем сказанное в виде алгоритмической процедуры метода.

Для решения задачи оптимального управления в форме Лагранжа необходимо:

1) составить функцию Беллмана:

$$B(t, x, u, \partial S(x, t)/\partial x) = F(t, x, u) + \text{grad}^T S(x, t) f(t, x, u);$$

2) минимизировать функцию Беллмана по  $u(t) \in U^m$ :

$$\min_{u(t) \in U} B(t, x, u, \partial S(x, t)/\partial x) = B^*(t, x, \partial S(x, t)/\partial x),$$

при этом определить управление как явную функцию вектора состояния и  $\partial S(x, t)/\partial x$ :

$$u^* = u(x^*, \partial S(x, t)/\partial x);$$

3) составить уравнение Беллмана:

$$B^*(t, x, \partial S(x, t)/\partial x) + \partial S(x^*, t)/\partial t = 0, \quad S(x^*, T) = 0;$$

4) решением этого уравнения является функция  $S(x, t)$ , по которой определяются  $\partial S(x, t)/\partial x$ , а затем  $u^* = u(x^*, \partial S(x, t)/\partial x)$  — искомое оптимальное управление.

## Примеры

1. Для системы

$$\Sigma^2: \quad x'_1 = x_1 + x_2 u_1, \quad x'_2 = u_2$$

с ограниченным управлением  $|u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1$  решается задача Лагранжа. Составить уравнение Беллмана, если движение системы оценивается критерием

$$J(x) = \int_0^T F(t, x) dt, \quad x = (x_1, x_2)^T.$$

Согласно первому шагу процедуры составляем функцию Беллмана:

$$B(t, x, u, \partial S(x, t)/\partial x) = F(t, x) + \partial S(x, t)/\partial x_1 (x_1 + x_2 u_1) + (\partial S(x, t)/\partial x_2) u_2.$$

Минимум этой функции по ограниченному управлению достигается, если

$$u_1^* = -\text{sgn}(\partial S(x, t)/\partial x_1) x_2; \\ u_2^* = -\text{sgn}(\partial S(x, t)/\partial x_2),$$

что позволяет записать искомое уравнение Беллмана:

$$F + (\partial S/\partial x_1) x_2 - |(\partial S/\partial x_1) x_2| - |\partial S/\partial x_2| + \partial S/\partial t = 0.$$

2. Для управляемого объекта первого порядка  $x'(t) = ax(t) + bu(t)$ ,  $x(0)$  без ограничения на управление поставлена задача

Лагранжа с фиксированным временем и свободным правым концом. Критерий оптимальности движения принят в виде

$$J(x, u) = \int_0^T (x^2(t) + cu^2(t))dt.$$

Решение следует искать в классе линейных функций:

$$u(t) = k(t)x(t).$$

Составим функцию Беллмана для этой задачи:

$$V = x^2(t) + cu^2(t) + \partial S(x, t)/\partial x(ax(t) + bu(t))$$

и найдем ее минимум, используя для этого достаточные условия:

$$\partial V/\partial u = 2cu(t) + b \partial S(x, t)/\partial x = 0;$$

$$\partial^2 V/\partial u^2 = c > 0.$$

Определяем, что оптимальное управление должно иметь вид

$$u^* = -0,5b/c \partial S(x, t)/\partial x.$$

Составим теперь дифференциальное уравнение Беллмана:

$$x^2 - 0,25b^2/c(\partial S/\partial x)^2 + ax(\partial S/\partial x) + \partial S/\partial t = 0, \quad S(x(T), T) = 0.$$

Это нелинейное уравнение первого порядка в частных производных в общем случае не имеет решения. Однако в нашем случае, когда управление должно быть линейным относительно  $x$ , искомое решение  $S(x, t)$  следует искать в виде функции от  $x^2$ , например в виде  $S(x, t) = P(t)x^2$ . Составим уравнения относительно новой неизвестной  $P(t)$ , для чего найдем  $\partial S/\partial x = 2P(t)x$  и затем  $u^* = -b/c P(t)x$  и подставим эти результаты в уравнение Беллмана.

Получим

$$P'(t) - b^2/c^2 P^2(t) - 2aP(t) + 1 = 0, \quad P(T) = 0 \quad \text{—}$$

нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка типа Риккати с граничным условием на правом конце. Это уравнение можно решить, например, методом разделения переменных. Решение принимает вид

$$P(t) = p_1 p_2 (1 - \exp(-b^2/c^2 (p_1 - p_2)(T - t))) / (p_2 - p_1 \exp(-b^2/c^2 (p_1 - p_2)(T - t))),$$

где  $p_1, p_2$  — корни уравнения  $b^2/c^2 P^2(t) + 2aP(t) - 1 = 0$ .

Заметим, что если  $T$  достаточно велико, то  $P(t)$  незначительно отличается от постоянной, при этом

$$P(t) \sim p_1, \text{ если } p_1 > p_2, \text{ и } P(t) \sim p_2, \text{ если } p_2 > p_1.$$

Итак, если в настоящей задаче  $T$  достаточно велико, то почти точно  $P(t) = \max(p_1, p_2)$ .

Рассмотрим задачу Лагранжа с закрепленными концами и свободным временем для произвольной динамической системы:

$$\sum^n: x' = f(x, u); \quad x(0) = x^0; \quad x(T) = x^*; \quad u(t) \in U^m.$$

Следует найти допустимое управление, переводящее эту систему из  $x^0$  в  $x^*$  так, чтобы критерий качества

$$J(u, x, T) = \int_0^T F(x(t), u(t))dt$$

принимал наименьшее значение.

Для решения этой задачи согласно процедуре метода введем в рассмотрение функцию,  $R(x)$ , которая совпадает с наименьшим значением критерия вдоль оптимальной траектории от текущего состояния  $x$  до цели  $x^*$ . Эта функция, очевидно, зависит только от текущего состояния. Предположим, что эта функция непрерывно дифференцируема. Уравнение Беллмана в этом случае принимает вид

$$\min_{u(t) \in U} [F(x(t), u(t)) + \text{grad}^T R(x) f(x(t), u(t))] = 0.$$

Задача максимального быстродействия является частным случаем сформулированной задачи Лагранжа с закрепленными концами и свободным временем, если положить в ней  $F(x(t), u(t)) \equiv 1$ . Содержательный смысл функции  $R(x)$  — наименьшее время, необходимое для перевода системы из текущего состояния  $x(t)$  до цели. Уравнение Беллмана для этой задачи принимает вид

$$\min_{u(t) \in U} [\text{grad}^T R(x) f(x(t), u(t))] = -1, \quad R(x^*) = 0.$$

Уравнение Беллмана имеет простую геометрическую интерпретацию. Пусть целью движения является начало координат  $x^* = 0$ , тогда  $R(x) = T^*$  — множество точек фазового пространства, для которых время перехода системы в начало координат составляет ровно  $T^*$ . Называют эту гиперповерхность *изохроной*.

Записав уравнение Беллмана в максимальной форме:

$$\max_{u(t) \in U} [(-\text{grad}^T R(x)) f(x, u)] = 1,$$

получим геометрическое условие оптимальности в задаче быстродействия:

*Оптимальное управление следует выбирать таким, чтобы в любой точке изохроны вектор нормали  $-\text{grad} R(x)$  и текущий вектор фазовой скорости  $f(x, u)$  были предельно близки, и, если бы управление не было бы ограничено, оба вектора должны были бы иметь одно направление.*

## Примеры

1. Найти оптимальное управление в задаче Лагранжа с закрепленными концами для системы

$$\sum^2: x_1' = x_2; \quad x_2' = ax_2 + u; \quad x(0) = x^0,$$

если управление не ограничено, цель движения  $x^*$  и критерий оптимальности имеет вид

$$J(u, x) = \int_0^{\infty} (x_1^2 + cx_2^2 + u^2) dt.$$

Составим функцию Беллмана:

$$cx_2^2 + u^2 + (\partial R(x)/\partial x_1)x_2 + (\partial R(x)/\partial x_2)(ax_2 + u)$$

и минимизируем ее по управлению. Ясно, что  $u^* = -0,5\partial R(x)/\partial x_2$ , поэтому дифференциальное уравнение Беллмана принимает вид

$$x_1^2 + cx_2^2 - 0,25(\partial R(x)/\partial x_2)^2 + (\partial R(x)/\partial x_1)x_2 + (\partial R(x)/\partial x_2)ax_2 = 0, \quad R(0) = 0.$$

Решение этого уравнения будем искать в квадратичной форме от вектора состояния:

$$R(x) = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2,$$

для определения коэффициентов формы подставим  $R(x)$  в уравнение Беллмана. После соответствующих преобразований найдем, что

$$\alpha = 2a(1 - 8a)/(c + 8(2a))^{0,5}; \quad \beta = 2; \quad \gamma = (4c + 16)/(1 - 8a),$$

а затем и искомое оптимальное управление:

$$u^* = -2x_1 - 4(c + 2)/(1 - 8a) x_2.$$

2. Найти допустимое управление  $|u(t)| \leq 1$ , которое максимально быстро переведет систему  $x'(t) = ax(t) + u(t)$  из начального состояния  $x(0)$  в начало координат.

Составим функциональное соотношение Беллмана для данной задачи:

$$\min_{|u(t)| \leq 1} [dR(x)/dx(ax(t) + u(t))] = -1, \quad R(0) = 0.$$

Ясно, что минимум выражения в скобках достигается при

$$u^* = -\text{sgn}(dR(x)/dx),$$

поэтому уравнение Беллмана принимает вид

$$a(dR(x)/dx)x - |dR(x)/dx| = -1, \quad R(0) = 0.$$

По смыслу функция  $R(x) \geq 0$  является и монотонно убывающей для  $x < 0$ , и монотонно возрастающей для  $x > 0$ , поэтому  $u^* = -\text{sgn } x$ . При этом время достижения находим, решив уравнение Беллмана:  $R(x) = \ln(1 - a|x|)/a$ ,  $|x| < a^{-1}$ .

3. Найти допустимое управление  $|u(t)| \leq 1$  для быстрейшего перевода из произвольной точки фазового пространства в начало координат системы:

$$\Sigma^2: x'_1 = x_2; \quad x'_2 = u, \quad x(0).$$

Составим функциональное соотношение Беллмана для данной задачи:

$$\min_{|u(t)| \leq 1} [(\partial R(x)/\partial x_1)x_2 + (\partial R(x)/\partial x_2) u(t)] = -1, \quad R(0) = 0.$$

Ясно, что минимум выражения в скобках достигается при

$$u^* = -\text{sgn}(\partial R(x)/\partial x_2),$$

поэтому дифференциальное уравнение Беллмана принимает вид

$$1 + (\partial R(x)/\partial x_1)x_2 - |\partial R(x)/\partial x_2| = 0, \quad R(0) = 0.$$

Рассмотрим область  $\Phi_1 = \{(x_1, x_2): \partial R(x)/\partial x_2 > 0\}$ , в которой  $u^* = -1$  и уравнение Беллмана принимает вид

$$1 + (\partial R(x)/\partial x_1)x_2 - \partial R(x)/\partial x_2 = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$R(x) = x_2 + 2(0,5x_2^2 + x_1)^{0,5}.$$

В области

$$\Phi_2 = \{(x_1, x_2): \partial R(x)/\partial x_2 < 0\},$$

в которой  $u^* = 1$  и уравнение Беллмана принимает вид

$$1 + (\partial R(x)/\partial x_1)x_2 + \partial R(x)/\partial x_2 = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$R(x) = -x_2 + 2(0,5x_2^2 - x_1)^{0,5}.$$

Объединим полученные результаты: границей областей  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  является кривая  $x_1 + 0,5x_2^2 \text{sgn } x_2 = 0$ , а искомое оптимальное управление:

$$u^* = -\text{sgn}(x_1 + 0,5x_2 \text{sgn} x_2).$$

Заметим, что найденное оптимальное управление представлено в явной зависимости от фазовых координат состояния системы, что позволяет синтезировать замкнутую систему управления.

Еще один замечательный результат. В каждой области  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  можно определить аналитическое выражение для семейства изохрон уровня  $T^*$ . Например, это семейство задается выражением:

в области  $\Phi_1$

$$x_1 + 0,5x_2^2 - 0,25(T^* - x_2)^2 = 0;$$

в области  $\Phi_2$

$$x_1 - 0,5x_2^2 + 0,25(T^* + x_2)^2 = 0;$$

на границе этих областей

$$x_1 + 0,5x_2 T^* = 0.$$

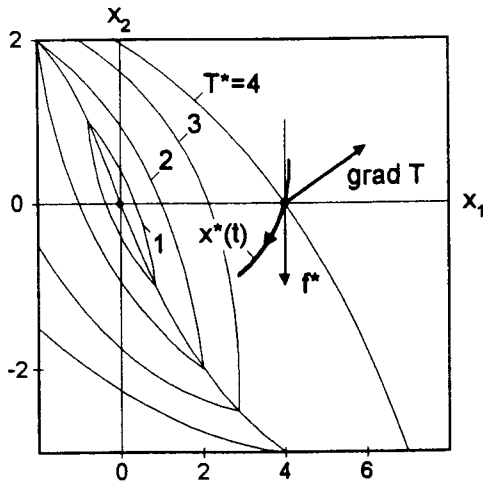


РИС. 115

На рис. 115 изображено семейство изохрон данной задачи и выделены в точке  $x_1 = (4 \ 0)^T$  вектор  $\text{grad } R(x_1) = (0,5 \ 1)^T$  и вектор фазовой скорости  $f(x_1, u) = (0 \ u)^T$ . Уравнение Беллмана в максимальной форме позволяет графически найти

оптимальное управление в данной точке фазового пространства. Из всех возможных управлений лишь при управлении  $u = -1$  фазовый вектор будет иметь наибольшую проекцию на направление нормали —  $\text{grad } R(x_1) = (-0,5 \ -1)^T$  к изохроне в этой точке. Значит, оптимальное управление в этой точке  $u^*(x_1) = -1$ .

#### 14.4. СИСТЕМЫ, ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ

Реальная траектория движения системы в силу неизбежных причин всегда отличается от расчетной, поэтому проблема реализации программного движения сопряжена с необходимостью решения задачи автоматической стабилизации реальной траектории относительно расчетной.

Назовем, следуя А.М. Ляпунову, отклонение реального движения  $z(t)$  от расчетного  $z^*(t)$  **возмущенным движением**  $x(t) = z(t) - z^*(t)$ . Чтобы погасить возмущенное движение, необходимо дополнительное управление  $u(t)$ . Уравнение возмущенного движения обычно представляется линейной моделью:

$$\Sigma^n: \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0),$$

которая получается из разложения реального движения в ряд Тейлора в окрестности расчетного движения.

Задача оптимальной стабилизации траектории движения состоит в том, чтобы найти управление  $u(t)$ , которое при любых начальных возмущениях приводило бы систему  $\Sigma^n$  в начало координат, минимизируя при этом текущее отклонение, затраты энергии на управление и конечное отклонение от цели. Последнее означает, что критерий качества управления принимает вид квадратичного функционала:

$$J(u(t)) = 0,5 \int_0^T [x^T(t)R_1x(t) + u^T(t)R_2u(t)]dt + 0,5x^T(T)R_3x(T),$$

где  $R_1, R_2$  — положительные определенные симметрические матрицы;  $R_3$  — положительная полуопределенная матрица.

Решение задачи оптимальной стабилизации можно найти методом динамического программирования либо с использованием принципа максимума.

В 11.3 для решения задачи аналитического синтеза оптимального регулятора использовался принцип максимума, сейчас для решения аналогичной задачи стабилизации воспользуемся процедурой динамического программирования.

Функциональное уравнение Беллмана принимает вид

$$\begin{aligned} \partial S(x, t) / \partial t + \min_u [0,5x^T(t)R_1x(t) + u^T(t)R_2u(t)] + \\ + 0,5\text{grad}^T S(x, t)[Ax(t) + Bu(t)] \end{aligned}$$

с граничным условием  $S(x(T), T) = 0,5x^T(T)R_3x(T)$ .

Выполнив, используя необходимое условие, операцию минимизации, получим

$$u^*(t) = -R_2^{-1}B^T \text{grad} S(x, t).$$

Для того чтобы оптимальное управление  $u^*(t)$  было линейной формой от вектора состояния, необходимо, чтобы функция  $S(x, t)$  имела вид квадратичной формы:

$$S(x, t) = 0,5x^T(t)P(t)x(t),$$

где  $P(t)$  — симметрическая матрица.

В силу этого предположения оптимальное управление принимает вид

$$u^*(t) = -R_2^{-1}B^T P(t)x(t).$$

Матрицу  $P(t)$  можно найти, решив уравнение Риккати, которое получается, если в уравнение Беллмана подставить найденное выражение оптимального управления:

$$P'(t) = P(t)BR_2^{-1}B^T P(t) - P(t)A - A^T P(t) - R_1, \quad P(T) = R_3.$$

Р. Калман доказал, что решение этого уравнения  $P(t)$  единственно и уравнение Беллмана оказывается **необходимым и достаточным условием оптимальности** найденного управления. Кроме того, Р. Калман показал, что при  $T \rightarrow \infty$  для стационарной вполне управляемой линейной системы матричное дифференциальное уравнение Риккати сводится к алгебраическому:

$$PA + A^T P - PBR_2^{-1}B^T P + R_1 = 0,$$

решение которого определяет постоянную матрицу  $P^*$  и оптимальное управление в замкнутой форме:

$$u^*(t) = -Kx(t),$$

где  $K = R_2^{-1}B^T P^*$  — матрица обратной связи.

### Пример

Модель возмущенного движения ракеты переменной массой имеет вид

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2; & x_2' &= k_1/(k_2 - t)x_3; \\ x_3' &= u; & x(0) &\neq 0, \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2$  — отклонение от расчетной траектории и его скорость соответственно;  
 $x_3$  — угол направления вектора тяги;  
 $k_1, k_2$  — известные параметры.

Следует найти такое управление, которое бы стабилизировало движение ракеты относительно расчетной траектории так, чтобы минимизировать функционал качества:

$$J = 0,5 \int_0^T [x^T(t)R_1x(t) + 10u(t)]dt,$$

где  $R_1 = \text{diag}(0,510^{-6} \quad 10^{-3} \quad 10^3)$ ;  
 $T = 250$  с.

В нашем случае  $R_2 = 10$ ,  $B = (0 \quad 0 \quad 1)^T$ ,  $P(t) = (p_{ij}(t))$ , поэтому искомое оптимальное управление:

$$u^*(t) = -0,1(p_{13}(t) \quad p_{23}(t) \quad p_{33}(t))x(t).$$

Матричное уравнение Риккати порождает в силу симметричности матрицы  $P(t)$  шесть дифференциальных уравнений с граничными условиями  $\forall i, j \quad p_{ij}(T) = 0$ :

$$\begin{aligned} p_{11}' &= 0,1p_{13}^2 - 0,5 \cdot 10^{-6} (300 - t)^{-2}; \\ p_{12}' &= 0,1p_{13}p_{23} - p_{11}; \\ p_{13}' &= 0,1p_{13}p_{33} - k_1(k_2 - t)p_{12}; \\ p_{22}' &= 0,1p_{23}^2 - 2p_{12} - 10^3(300 - t)^{-2}; \\ p_{23}' &= 0,1p_{23}p_{33} - k_1(k_2 - t)p_{22} - p_{13}; \\ p_{33}' &= 0,1p_{33}^2 - 2k_1(k_2 - t)p_{23} - 10^3(300 - t)^{-2}. \end{aligned}$$

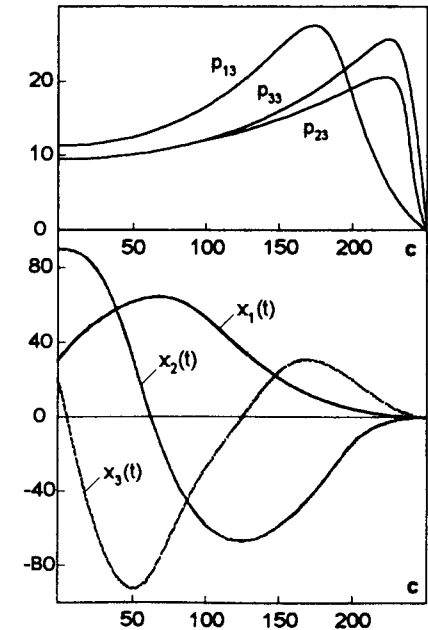


РИС. 116

Эта система нелинейных дифференциальных уравнений с условием на правом конце решается в обратном времени заменой переменного  $\tau = 250 - t$ . На рис. 116 приведены результаты решения: компоненты матрицы  $P(t)$ , определяющие оптимальное управление и координаты движения стабилизации из начального состояния  $x(0)$ .

## 14.5. СИСТЕМЫ, ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ

Численные методы решения задачи оптимального быстрогодействия позволяют найти управление как функцию времени. Такое представление приводит к разомкнутым структурам, к системам программного управления, вынуждая регулятор в том или ином темпе периодически повторять процедуру вычисления оптимального управления.

Проблема синтеза оптимальной по быстродействию системы сводится к отысканию оптимального управления в форме явной зависимости от координат вектора состояния. Области фазового пространства, где оптимальное управление постоянно и одного знака, разделяются поверхностями переключения. Проблема синтеза считается полностью разрешенной, если найдены аналитические представления поверхностей переключения как функций координат фазового пространства. Заметим, однако, что трудности общего решения задачи синтеза становятся непреодолимыми уже для систем порядка выше трех. Проблема синтеза полностью разрешима для линейных систем второго порядка.

Рассмотрим систему второго порядка с действительными полюсами  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ .

- Случай  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ .

Невырожденным преобразованием переменных  $x \rightarrow z$  уравнение движения системы приводим к удобному для разрешения виду

$$z' = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)z + (\lambda_1, \lambda_2)^T u, \quad z(0) = (\xi_1, \xi_2)^T.$$

Известно, оптимально быстрый перевод системы из начального состояния в начало координат возможно выполнить, используя управление

$$u^* = \text{sgn}(\lambda_1, \lambda_2)\psi,$$

где вспомогательный вектор удовлетворяет уравнению  $\psi' = -\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)\psi$ .

Таким образом, оптимальное управление — релейная функция, которая меняет знак не более чем однажды. Построим фазовый портрет системы. Уравнения движения системы в скалярной записи имеют независимый вид:

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda_1 z_1 + \lambda_1 u, & z_1(0) &= \xi_1; \\ z_2' &= \lambda_2 z_2 + \lambda_2 u, & z_2(0) &= \xi_2, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} z_1(t) &= (\xi_1 + u) \exp(\lambda_1 t) - u; \\ z_2(t) &= (\xi_2 + u) \exp(\lambda_2 t) - u. \end{aligned}$$

Уравнения кривых фазового портрета можно получить, исключив время как параметр из этих решений:

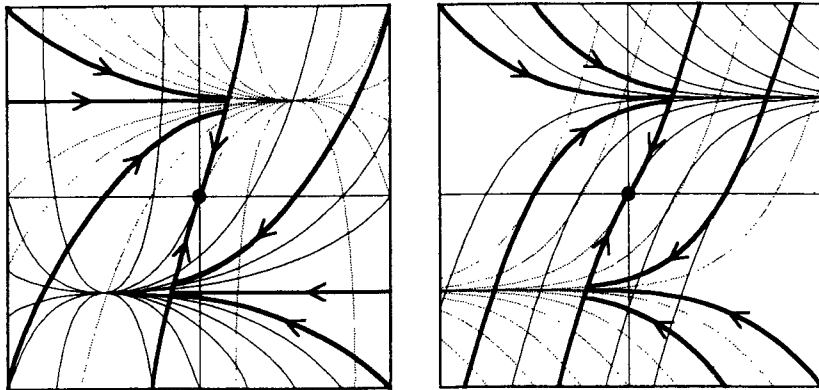
$$z_2 = (\xi_2 + u)((z_1 + u)/(\xi_1 + u))^\beta - u, \quad \beta = \lambda_2/\lambda_1.$$

Фазовые портреты системы для  $u = \pm 1$  представляются двумя семействами кривых: каждая кривая семейства начинается в точке  $(\xi_1, \xi_2)^T$  и заканчивается в положении равновесия либо в точке  $(-1, -1)^T$ , либо в точке  $(1, 1)^T$ . Среди кривых каждого семейства имеется по одной кривой  $L^+$ ,  $L^-$ , проходящей через начало координат фазового пространства. Эти кривые образуют **линию переключения**  $L = L^+ \cup L^-$ , по этим кривым проходит завершающая часть движения системы в начало координат. Линия переключения делит фазовое пространство на два множества, в одном из них оптимальное управление принимает значение  $u^* = 1$ , в другом  $u^* = -1$ , смена знака управления происходит на линии переключения. В данном случае

$$L^+ = \{(z_1, z_2): z_2 = (1 + z_1)^\beta - 1, z_1 > 0, z_2 > 0\};$$

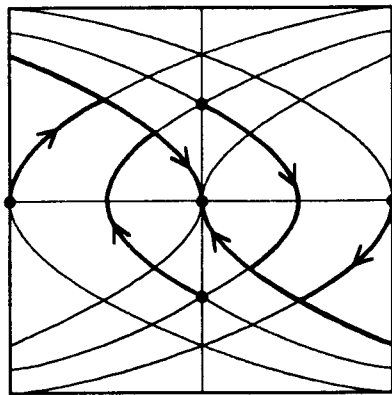
$$L^- = \{(z_1, z_2): z_2 = -(1 - z_1)^\beta + 1, z_1 < 0, z_2 < 0\};$$

$$L = \{(z_1, z_2): z_2 = ((1 + |z_1|)^\beta - 1) \text{sgn } z_1\}.$$

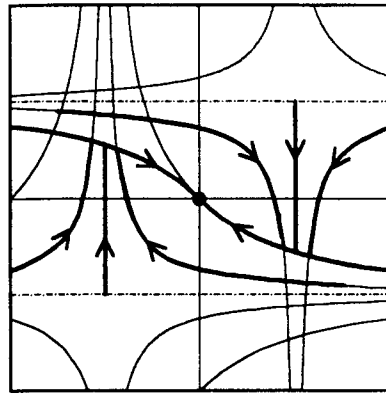


а

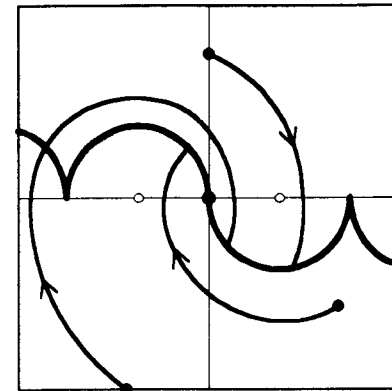
б



в



г



д

На рис. 117, а изображена фазовая картина синтеза.

- Случай  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ .

Невырожденным преобразованием переменных  $x \rightarrow z$ , уравнение движения системы приводим к виду

$$z' = \text{diag}(0 \ \lambda_2)z + (\lambda_2 \ \lambda_2)^T u, \quad z(0) = (\xi_1 \ \xi_2)^T,$$

РИС. 117

или в скалярной форме:

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda_2 u, & z_1(0) &= \xi_1; \\ z_2' &= \lambda_2 z_2 + \lambda_2 u, & z_2(0) &= \xi_2. \end{aligned}$$

Эти уравнения легко разрешаются:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \xi_1 + \lambda_2 u t; \\ z_2(t) &= (\xi_2 + u) \exp(\lambda_2 t) - u, \end{aligned}$$

что позволяет записать уравнение кривых фазового портрета:

$$z_2(t) = (\xi_2 + u) \exp((z_1 - \xi_1)/u) - u$$

и искомую линию переключения:

$$L = \{(z_1, z_2): z_2 = (\exp |z_1| - 1) \text{sgn } z_1\}.$$

На рис. 117, б изображена фазовая картина синтеза.

- Случай  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  рассматривался ранее.

Напомним, что уравнения движения этой системы:

$$x_1' = x_2; \quad x_2' = u, \quad x(0).$$

Фазовый портрет системы для  $u = \pm 1$  представляется двумя семействами парабол:

$$x_1 = C + 0,5x_2^2 u,$$

поэтому линия переключения  $L = \{(x_1, x_2): x_1 = -0,5x_2^2 \text{sgn } x_2\}$ .

На рис. 117, в изображена фазовая картина синтеза.

- Случай  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ .

Фазовые портреты системы для  $u = \pm 1$  представляются двумя семействами гипербол с центрами в точках  $(-1 \ -1)^T$  и  $(1 \ 1)^T$ . Среди кривых каждого семейства имеется по одной кривой, проходящей через начало координат фазового пространства. Эти кривые образуют линию переключения. Однако не-



трудно видеть, что достичь эту линию переключения можно лишь из точек, расположенных в полосе  $\{(x_1, x_2): |x_2| < 1\}$ . Для этих и только этих точек множества возможен синтез оптимального управления.

На рис. 117, з изображена фазовая картина синтеза.

Оптимальное управление для линейных систем с комплексными полюсами не удовлетворяет теореме Фельдбаума-Беллмана, число переключений управления не связано с порядком системы и зависит от ее начального состояния. Для решения задачи синтеза найдем линию переключения, используя свойства фазового портрета системы. Фазовый портрет управляемой системы второго порядка с комплексными полюсами:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\omega, \quad \alpha > 0$$

представляется для  $u = \pm 1$  двумя семействами логарифмических спиралей, навивающихся на фокусы в точках:

$$\begin{aligned} &((\alpha^2 + \omega^2)^{-1}, \quad \alpha(\alpha^2 + \omega^2)^{-1} \omega^{-1})^T; \\ &(-(\alpha^2 + \omega^2)^{-1}, \quad -\alpha(\alpha^2 + \omega^2)^{-1} \omega^{-1})^T. \end{aligned}$$

Заметим, что если  $\alpha = 0$ , то фазовые кривые портрета являются окружностями с центрами в точках  $(\omega^{-2}, 0)^T$  и  $(-\omega^{-2}, 0)^T$ .

Оптимальное управление  $u^* = \operatorname{sgn} \psi_2$ , вспомогательная переменная удовлетворяет уравнению  $\psi' = -A^T \psi$ . Собственные числа матрицы  $-A^T$  совпадают с точностью до знака с собственными числами системы. Значит,  $\psi_2(t)$  — гармоническая функция с периодом  $2\pi/\omega$ , но тогда оптимальное управление меняет свой знак каждые  $\pi/\omega$  секунд. Таким образом, любое оптимальное движение в начало координат складывается из движения по кривой одного семейства в течение  $\pi/\omega$  секунд, последующего движения  $\pi/\omega$  секунд — по кривым второго семейства и так далее. Исключение могут составить начальный и финальный участки траектории движения, по которым время движения может быть меньше  $\pi/\omega$  секунд. Заметим, что, пробегая  $\pi/\omega$  секунд по кривой портрета — спирали или окружности, фазовая точка стягивает центральную дугу величиной  $\pi$ .

Используя отмеченные свойства оптимального движения, построим линию переключения. Пусть  $L_{+0}, L_{-0}$  — кривые из двух

семейств портрета, например полуокружности, которые проходят через начало координат и стягивают угол  $\pi$ . Обозначим  $L_{-1}, L_{+1}$  геометрическое место точек, откуда можно перейти за время  $\pi/\omega$  секунд на полуокружности  $L_{+0}, L_{-0}$  соответственно. Этими геометрическими местами оказываются также полуокружности. Определим далее  $L_{+2}, L_{-2}$  как геометрическое место точек, откуда можно перейти за время  $\pi/\omega$  секунд на полуокружности  $L_{-1}, L_{+1}$ . Такое определение можно продолжить. Линия переключения оптимального управления определяется как объединение всех таких полуокружностей:

$$L = \bigcup_k (L_{-k} \cup L_{+k}), \quad k = 0, 1, \dots;$$

это объединение представляется полуокружностями одного радиуса с центрами в точках  $(\pm(2k+1)\omega^{-2}, 0)^T$ .

Аналогично определяется линия переключения для системы с  $\alpha \neq 0$ . На рис. 117, д изображена фазовая картина синтеза.

Завершающим этапом проблемы оптимального синтеза является определение структуры замкнутой системы управления. Тот факт, что линия переключения ориентирована и делит фазовую плоскость на два множества, в одном из которых оптимальное управление принимает значение  $u^* = 1$ , в другом  $u^* = -1$ , позволяет составить алгоритм определения взаимного расположения текущего состояния системы относительно линии переключения и вместе с этим текущее значение оптимального управления:

$$u^* = -\operatorname{sgn}(z_2 - L(z_1)).$$

Координаты вектора  $z$  связаны с реальным состоянием  $x$  системы линейным преобразованием, которое реализуется в регуляторе.

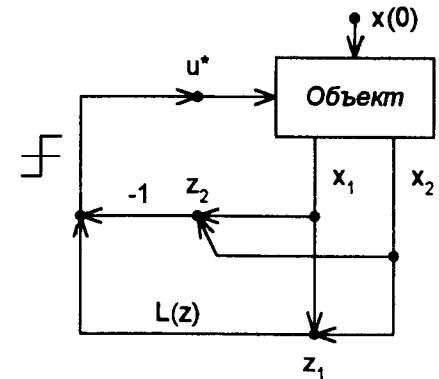


РИС. 118

На рис. 118 представлен вариант реализации структуры замкнутой системы, оптимально быстро переходящей из ненулевого начального состояния в состояние покоя.

## 14.6. СУБОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Оптимальное движение системы, формируемое оптимальным управлением, при технической реализации оказывается в силу ряда объективных причин недостижимым предельным свойством системы. Этот факт объективен прежде всего потому, что любая математическая модель системы ограниченно достоверна, и потому, что практически невозможно идеально точно воспроизвести найденный оптимальный закон управления. В этом смысле все реальные "оптимальные системы" являются *квазиоптимальными*, или *субоптимальными*.

Велико разнообразие квазиоптимальных систем! Рассмотрим некоторые из них. Например, проследим последствия неточной реализации линии переключения. Пусть для системы

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = u$$

оптимальная линия переключения  $L = \{(x_1, x_2): x_1 = -0,5x_2^2 \operatorname{sgn} x_2\}$  аппроксимируется кусочно-линейно.

Изображающая точка, двигаясь из начального положения под действием управления  $u = 1$ , пересекает некоторый прямолинейный участок аппроксимации линии переключения. В точке пересечения  $A$  угловой наклон линейного участка может оказаться меньше, чем угловой наклон касательной к траектории движения под действием управления  $u = -1$ . Возникает так называемый *скользящий режим движения*, когда движение формируется под действием управления, меняющего свой знак с большой частотой. Истинное движение системы происходит, как показано на рис. 119, а, не по кривой фазового портрета, а по аппроксимирующей прямой  $AB$  до тех пор, пока выполняются условия возникновения скользящего режима. Если в точке пересечения  $B$  угловой наклон линейного участка больше углового наклона касательной к траектории движения под действием управления  $u = -1$ , то дальнейшее движение происходит по одной из кривых фазового портрета системы и для достижения положения покоя уже потребуется более чем одно переключение.

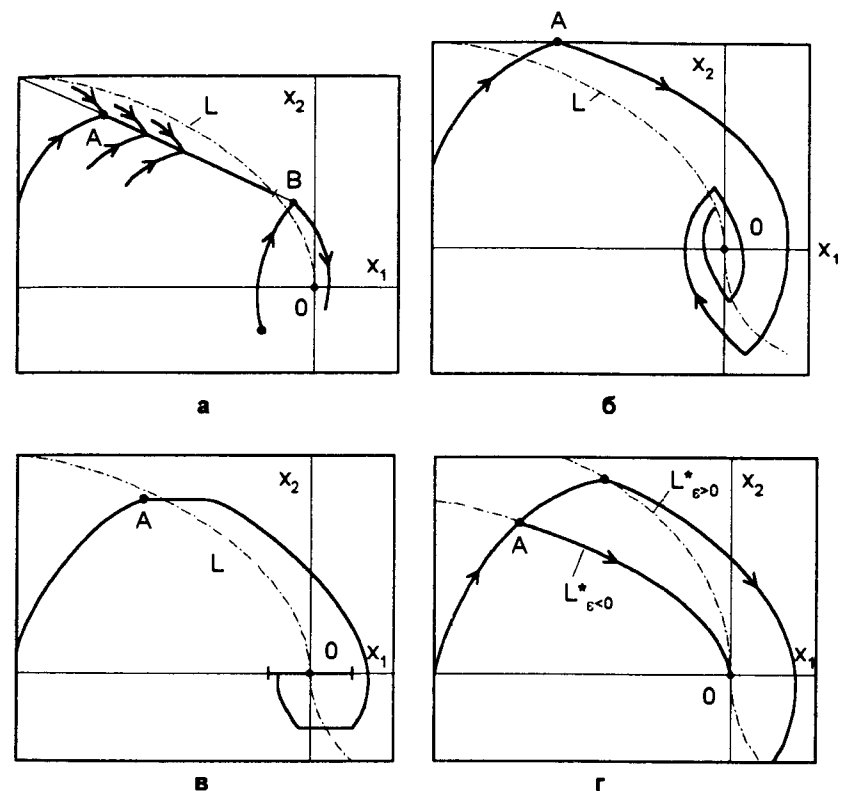


РИС. 119

Проследим последствия неточного воспроизведения функции переключения, которое реализуется неидеальными релейными устройствами. К примеру, если характеристика реле имеет гистерезис, то переключения оказываются всегда чуть позже оптимальных и поэтому движение оказывается квазиоптимальным и в окрестности положения покоя, как показано на рис. 119, б, возникают устойчивые автоколебания. Если характеристика реле имеет зону нечувствительности, то квазиоптимальное движение будет содержать прямолинейные траектории и движение заканчивается на отрезке покоя, как показано на рис. 119, в.

Проследим последствия неточного описания реальной системы ее моделью. Пусть реальная система описывается уравнениями:

$$x'_1 = x_2; \quad x'_2 = u,$$

а ее модель — уравнениями

$$x'_1 = x_2; \quad x'_2 = (1 + \epsilon)u.$$

Реальная система движется по траекториям

$$x_1 = 0,5x_2^2 \operatorname{sgn} u + C,$$

и оптимальные переключения должны происходить на кривой

$$L = \{(x_1, x_2): x_1 = -0,5x_2^2 \operatorname{sgn} x_2\},$$

однако в регуляторе реализована кривая

$$L^* = \{(x_1, x_2): x_1 = -0,5(1 + \epsilon)^{-1} x_2^2 \operatorname{sgn} x_2\}.$$

поэтому при  $\epsilon > 0$  субоптимальное движение будет содержать участки скользящего режима, а при  $\epsilon < 0$ , как показано на рис. 119, а имеют место перерегулирование и многократные переключения управления.

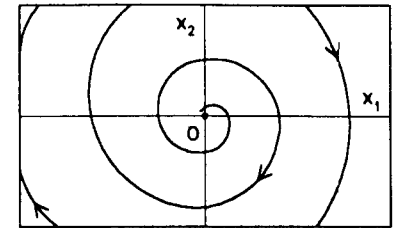
Скользящий режим, как специфическое движение нелинейной системы с разрывным управлением, целенаправленно используется для построения так называемых *систем с переменной структурой*, которые позволяют реализовать субоптимальное движение системы. Основная идея, положенная в основу организации систем с переменной структурой, состоит в том, чтобы, вводя систему в состояние скользящего режима, принудить ее двигаться по траекториям, отличным от траекторий фазового портрета ее подсистем. Проиллюстрируем эту идею на примере. Пусть рассматривается линейная система

$$x'_1 = x_2; \quad x'_2 = x_1 - 2x_2 + u,$$

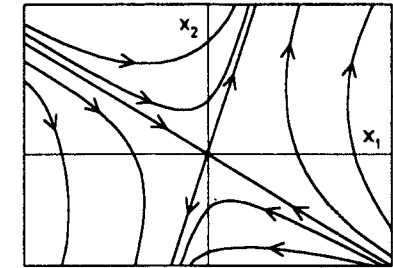
в которой управление принято в виде  $u = -\alpha x_1 \operatorname{sgn} G(x_1, x_2)$ . Разрыв управления происходит на многообразии  $G(x_1, x_2) = 0$ . При этом двум разным управлениям соответствуют два различных движения системы. Будем говорить, что система содержит две структуры:

РИС. 120

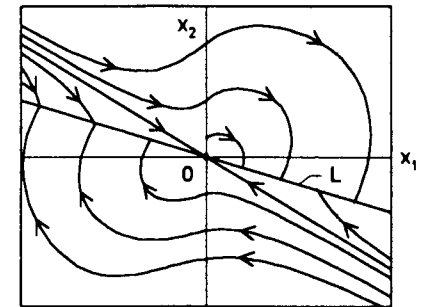
$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2, & x'_2 &= (1 - \alpha)x_1 - 2x_2; \\ x'_1 &= x_2, & x'_2 &= (1 + \alpha)x_1 - 2x_2. \end{aligned}$$



а



б



в

Величина  $\alpha$  подбирается так, что первая структура системы имеет два правых комплексных полюса, а вторая — пару действительных полюсов разного знака. Обе структуры неустойчивы, однако можно подобрать многообразие переключения  $G(x_1, x_2) = 0$  так, что вся система окажется асимптотически устойчивой в целом. В самом деле, пусть  $G = x_1(\beta x_1 + x_2)$ ,  $\beta > 0$ . Коэффициент  $\beta$  можно подобрать таким, чтобы в двусторонней окрестности прямой  $\beta x_1 + x_2 = 0$  фазовые кривые обеих структур системы были направлены встречно друг другу, что достаточно для возникновения скользящего режима. Из любого начального положения изображающая точка попадает на прямую переключения  $L = \{(x_1, x_2): \beta x_1 + x_2 = 0\}$  и скользит вдоль этой прямой вплоть до положения покоя, как показано на рис. 120. Значит, на время скользящего движения система оказывается как бы системой первого порядка. Асимптотическая устойчивость системы очевидна.

Одним из эффективных методов синтеза субоптимальных свойств системы управления является метод динамического прогнозирования движения системы, который позволяет находить текущее значение управляющего воздействия на основе свойств траектории будущего движения системы.

## 14.7. УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что стационарная точка  $(-2 \quad 3)^T$  является седловой для

$$J(x_1, x_2) = 0,5(-x_1^2 + 3x_2^2 - 10x_1 - 14x_2 + 2x_1x_2 + 11).$$

2. Найти:

а) траекторию, которая проходит через точки  $x(0) = 0$ ,  $x(\pi/2) = 1$  и на которой достигает экстремума функционал

$$J(x, x') = \int_0^{\pi/2} (-x^2 + (x')^2) dt;$$

б) траекторию, которая проходит через точки  $x(0) = 1$ ,  $x(1) = 0$  и которая минимизирует функционал:

$$J(x, x') = \int_0^1 x^{-1} (1 + (x')^2)^{0,5} dt.$$

3. Для системы

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_2 + u, \quad |u| \leq 1$$

найти управление, которое изменяет ее состояние из начального  $x_1(0) = x_2(0) = 1$  в конечное  $x_1(T) = x_2(T) = 0$  и при этом минимизирует функционал качества:

$$J(x, u) = 0,5 \int_0^T (10x^2 + u^2) dt, \quad T \text{ — свободно.}$$

4. Определить управление, переводящее систему  $x'' = u$ ,  $|u| \leq 1$  из состояния  $x_1(0) = x_2(0) = 1$  в состояние покоя за известное время  $T$ , так, чтобы минимизировать функционал качества:

$$\text{а) } J(x, u) = 0,5 \int_0^T u^2 dt;$$

$$\text{б) } J(x, u) = 0,5 \int_0^T (x^2 + u^2) dt.$$

Изобразить траектории движения системы при различных  $T$ .

5. Решить задачу максимального быстродействия для системы

$$x_1' = x_1 + 2x_2 + u_1 - u_2;$$

$$x_2' = -x_1 + 2x_2 + u_2,$$

если ограничения на управление задаются в виде

$$\text{а) } U = \{(u_1, u_2): |u_1| + |u_2| \leq 1\};$$

$$\text{б) } U = \{(u_1, u_2): 0 < u_1 < 1, -1 < u_2 < 0, u_2 = u_1 - 1\}.$$

6. Составить уравнение Беллмана в задаче оптимального управления нелинейной системой  $x' = u^{0,5}$  для перевода ее из состояния  $x(0)$  в состояние  $x(T)$  так, чтобы максимизировать критерий

$$J(x, u) = \int_0^T (x - u) dt.$$

7. Используя метод Беллмана, показать, что для линейной системы  $x' = Ax + Bu$  со скалярным ограниченным управлением  $|u| \leq 1$  оптимальное в смысле критерия

$$J(x, u) = 0,5 \int_0^{\infty} (x^T Qx + r^2 u^2) dt$$

управление для перевода системы из произвольного состояния в положение покоя принимает вид

$$u^* = \text{sat} (1/r \text{ grad}^T T(x) B).$$

8. Осуществить синтез оптимальной по быстродействию системы второго порядка, если

$$\text{а) } \lambda_1 > \lambda_2 > 0; \quad \text{б) } \lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0; \quad \text{в) } \lambda_1 = \lambda_2 > 0.$$

9. Построить фазовый портрет квазиоптимальной системы с объектом управления  $x'' = u$ , если характеристика реле со-

держит гистерезис, а линия переключения — прямая  $x_2 = -2x_1$ . Оценить частоту и амплитуду установившихся автоколебаний. Найти потери быстродействия при достижении положения покоя.

10. Для системы с объектом управления  $x_1' = x_2$ ,  $x_2' = x_2 + u$  определить структуру линейного регулятора, который позволяет выполнить оптимальную стабилизацию положения равновесия системы. Построить фазовый портрет системы, если функционал качества оптимальности зависит от двух параметров:

$$J(x, u; q, r) = 0,5 \int_0^{\infty} (x_1^2 + qx_2^2 + ru^2) dt, \quad q > 0, \quad r > 0.$$

Исследовать переходные процессы для случаев:

- а)  $q = 1$ ,  $r = 0,1$  в зависимости от  $q$ ;
- б)  $r = 1$ ,  $q = 0,1$  в зависимости от  $q$ .

## 15 СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С АДАПТАЦИЕЙ

---

---

*Задачи управления с адаптацией — Экстремальные системы и регуляторы — Идентификация объекта управления в замкнутом контуре — Адаптивные системы с эталонной моделью.*

### 15.1. ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С АДАПТАЦИЕЙ

**Адаптация** как понятие теории управления означает процесс изменения параметров или структуры системы управления на основе данных о ее текущем состоянии с целью достижения определенных, быть может оптимальных, свойств системы при начальной неопределенности или изменяющихся внешних условиях ее функционирования.

Теория адаптивных систем управления берет свое начало в 50-х годах XX в. как естественное развитие общей теории управления систем, в которых необходимо поддерживать заданный уровень некоторых показателей качества в условиях, когда под действием внешних или внутренних условий характеристики системы изменяются.

Примерами таких систем являются: дизельный привод, газотурбинная установка, реактивный двигатель, управляемый по возбуждению двигатель постоянного тока, система управления летательным аппаратом в изменяющихся аэродинамических условиях, процесс управления разогревом слитков в нагревательных колодцах, процессы управления химическими реакциями, процессы измельчения, флотации, магнитной сепарации при обогащении полезных ископаемых и многое другое. В первых трех примерах параметры моделей систем управления запуском

приводов — постоянные времени и коэффициент передачи существенно зависят от регулируемой частоты вращения вала привода, для моделей процессов управления нагревом или химических реакций характерна экстремальная зависимость управляемой переменной от параметров системы.

Для реализации процесса адаптации в системе необходимо иметь возможность измерения характеристик процесса, влияющих на значение некоторого показателя качества процесса, возможность оценки этого показателя и возможность изменения параметров управляющего устройства в зависимости от вычисленного значения показателя качества. Указанные возможности позволяют реализовать адаптацию системы путем выполнения трех необходимых процедур: **идентификации, принятия решения и модификации**. Эти процедуры определяют основные задачи синтеза систем с адаптацией:

- задачи **идентификации** — определения истинных значений параметров основной подсистемы управления;
- задачи **принятия решения** — формирования правила адаптации с использованием найденных значений;
- задачи **модификации** — реализации правила адаптации.

В структурном смысле адаптивная система содержит основную подсистему управления и подсистему адаптации, которая аппаратно или программно формирует сигнал адаптации для модифицирования основной подсистемы управления.

Разнообразие адаптивных систем управления в некотором смысле упорядочивает достаточно простая классификация, по которой будем отождествлять **адаптивные** и **самонастраивающиеся** системы, среди которых будем различать адаптивные системы с эталонной моделью и адаптивные системы без модели, которые могут быть замкнутыми или разомкнутыми.

Адаптивные системы без модели содержат в контуре адаптации, как показано на рис. 121, а, устройства, которые выполняют функции идентификации текущего вектора параметров основной подсистемы и затем вектора параметров настройки регулятора.

Адаптивные системы с эталонной моделью содержат в контуре адаптации, как показано на рис. 121, б, модель основной системы — объекта и регулятора, которая описывает эталонное движение основной системы. Основная система и модель испытывают одно и то же входное воздействие, поэтому рассогласова-

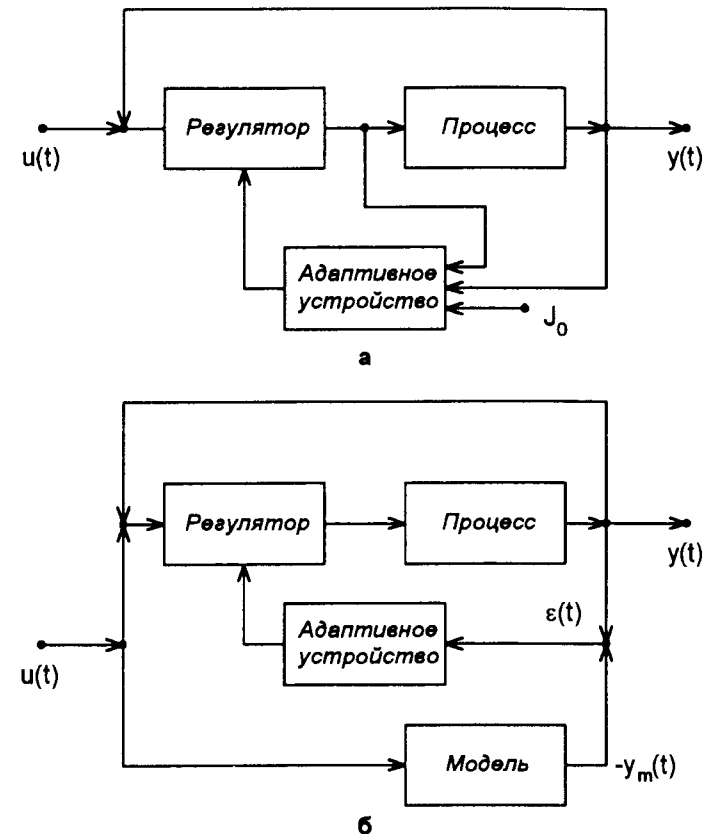


РИС. 121

ние реакций основной системы и ее модели характеризует меру отличия реальной системы от идеальной. Рассогласование двух движений используется в контуре адаптации для определения вектора параметров настройки регулятора основной системы.

## 15.2. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И РЕГУЛЯТОРЫ

В определенном смысле простейшими адаптивными системами являются так называемые экстремальные самонастраивающиеся системы, структура которых представлена на рис. 122.

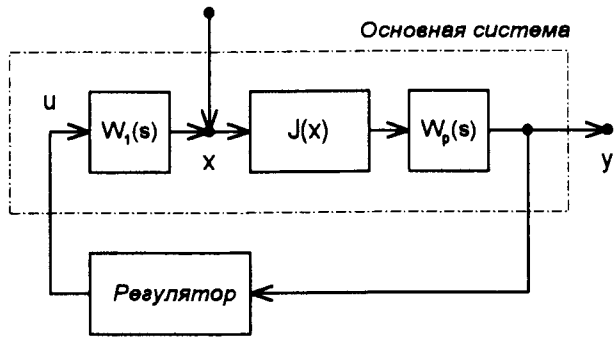


РИС. 122

Основное предназначение экстремальной системы состоит в том, чтобы стабилизировать координаты состояния системы относительно некоторой точки  $x^*$ , которая соответствует экстремуму  $J(x; \alpha, t)$  функции качества системы. Заметим, что **функция качества**  $J(x; \alpha, t)$  зависит не только от координат состояния, но также от параметров  $\alpha$  и, быть может, времени, иначе исчезает целесообразность экстремального управления, цель управления достигается обычной стабилизацией относительно точки  $x^*$ .

Обычно основная система, обладающая экстремальной характеристикой  $J(x; \alpha, t)$ , допускает возможность **"экспериментирования"** — целенаправленного изменения состояния системы путем изменения управляющего воздействия на величину **пробного возмущения** или специального тестового сигнала. Анализируя изменения экстремальной характеристики или реакцию системы на эти возмущения, можно выполнить так называемое **рабочее изменение** состояния системы, приближая его к точке экстремума.

Экстремальные системы различаются по методам поиска и по методам анализа результатов поиска. Поиск экстремума может быть непрерывным или дискретным, при этом пробное возмущение и рабочее движение могут совпадать, проходить параллельно или последовательно. Распространены в основном два метода анализа результатов поиска: с использованием градиента экстремальной характеристики и с запоминанием текущего отклонения реального значения и экстремума характеристики.

РИС. 123

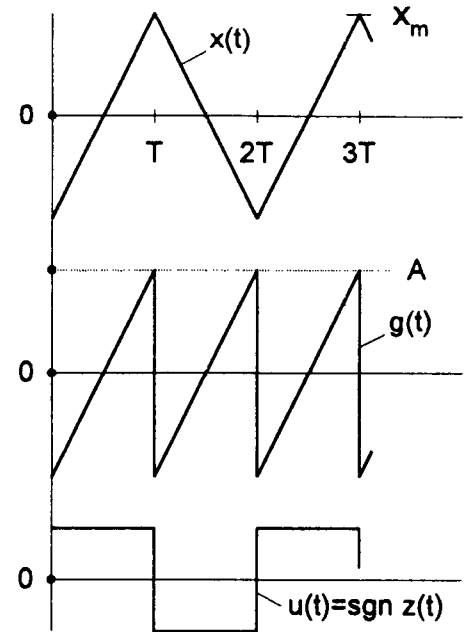
Рассмотрим на примере системы с одномерной экстремальной характеристикой  $J(x)$  две наиболее известные структуры экстремальных регуляторов.

В регуляторах первого типа определяются [13] текущая производная экстремальной характеристики и сигнал разности:

$$s(t) = dJ(x(t))/dt;$$

$$z(t) = (A - s(t)),$$

где  $A$  — заранее определенная величина.



Сигнал, пропорциональный разности  $s(t)$  с учетом ее знака, подается в систему через линейное динамическое звено  $W_1(p)$ , чаще всего интегратор. Регулятор позволяет определять экстремум характеристики с точностью до небольшого периодического процесса. Например, если в окрестности экстремума характеристика близка к квадратичной  $J(x) = kx^2$  и  $W_1(s) = 1/Ts$ , то в системе возникают автоколебания, вид которых изображен на рис. 123. При этом сигнал:

$$g(t) = dJ(x)/dx(dx/dt) = \pm 2kx(2x_m/T).$$

Поскольку  $A = 4kx_m^2/T$  — максимальное значение производной  $s(t)$  на периоде  $2T$ , то максимальное поисковое отклонение от точки экстремума:

$$J_m = kx_m^2 = 0,25AT.$$

Качество экстремального регулирования, определяемое величиной  $J_m$ , не может быть предельно улучшено потому, что

параметры А, Т, хотя и устанавливаются заранее, не могут быть выбраны очень малыми, поскольку при этом резко возрастают шумы регулятора.

В регуляторах с памятью [13] вместо определения производной используется прием запоминания текущего экстремума  $J^*(x)$ ,  $x \in [a, b]$  по правилу:

если при изменении  $x$  величина  $J(x)$  убывает, то  $J^*(x) = J(x)$ ,

однако если величина  $J(x)$  возрастает, то  $J^*(x) = \min_{x \in [a, b]} J(x)$ .

Таким образом, применительно к характеристикам параболического вида на падающей вплоть до нуля ветви значение  $J^*(x)$  совпадает с наименьшим значением и затем на возрастающей ветви  $J^*(x) = 0$ . На рис. 124 приведены кривые, иллюстрирующие это правило, и процесс поиска минимума. Направление поиска определяет знак разности

$$A - (J(x) - J^*(x)),$$

где параметр А, устанавливаемый заранее, определяет качество экстремального регулирования. Экстремальное регулирование и в этом случае сопровождается автоколебаниями.

К показателям качества процесса управления в экстремальных системах относят время поиска и параметры установившихся автоколебаний.

Для экстремальных систем, использующих ЭВМ в контуре управления, процедура поиска экстремума обычно строится на основе использования скалярных и векторных методов оптимизации [15]. В их числе: *методы дихотомии, золотого сечения и Фибоначчи, алгоритмы Гаусса-Зайделя, градиентные, сопряженных направлений и Ньютона-Рафсона, прямые методы поиска.*

Приведем некоторые алгоритмы оптимизации без детального обсуждения их эффективности и условий применения.

Алгоритмы скалярной оптимизации позволяют отыскать экстремум унимодальной функции на интервале  $[a, b]$ .

РИС. 124

• **Метод дихотомии** задает стратегию выбора последовательности точек поиска путем деления *интервала неопределенности* пополам. На первом шаге интервал неопределенности — весь отрезок, поэтому первая пара точек поиска задается в виде

$$x_1^{(1)} = 0,5(a + b - \varepsilon);$$

$$x_2^{(1)} = 0,5(a + b + \varepsilon).$$

Последующие пары определяются аналогично.

• **Метод Фибоначчи** определяет первую пару точек в виде

$$x_1^{(1)} = a + (b - a)F_n / F_{n+2}; \quad x_2^{(1)} = a + (b - a)F_{n+1} / F_{n+2},$$

где  $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ;

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ — числа Фибоначчи};$$

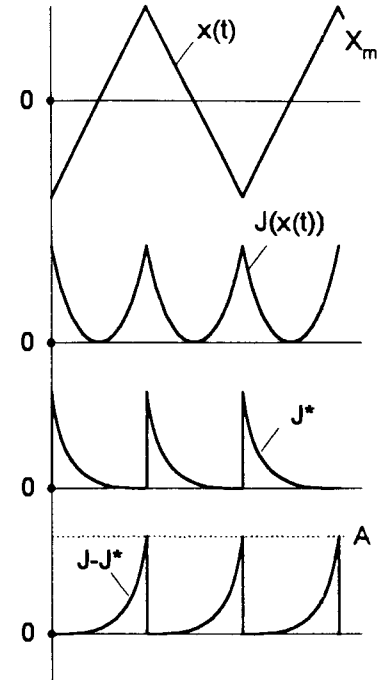
последующий интервал неопределенности содержит одну из найденных ранее точек поиска, другая точка задается симметричной к первой относительно границы интервала.

• **Метод золотого сечения** определяет первую пару точек в двух золотых сечениях отрезка  $[a, b]$ :

$$x_1^{(1)} = a + (b - a)(2 - \sigma); \quad x_2^{(1)} = a + (b - a)(\sigma - 1),$$

$$\sigma = 0,5(1 + \sqrt{5}),$$

одна из этих точек в следующем интервале неопределенности вновь оказывается в золотом сечении этого интервала, поэтому пару ей следует выбирать по симметрии.





Метод золотого сечения ненамного менее эффективен, чем метод Фибоначчи, но значительно эффективнее метода дихотомии.

Алгоритмы векторной оптимизации позволяют отыскать экстремум унимодальной функции в конечномерном евклидовом пространстве.

• **Алгоритм Гаусса-Зайделя** определяет последовательность точек поиска по правилу

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \lambda^{(n)} \partial J(\mathbf{x}) / \partial x_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где  $m$  — размерность пространства;  
 $\lambda^{(n)}$  — шаг поиска.

Шаг поиска  $\lambda^{(n)}$  выбирается таким, чтобы минимизировать функцию  $J(\mathbf{x})$  вдоль соответствующего координатного направления. Если  $\lambda^{(n)}$  при движении по одному направлению постоянен, алгоритм называют **покоординатным спуском**.

• **Градиентные алгоритмы** определяют последовательность точек поиска по правилу

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \lambda^{(n)} \nabla J(\mathbf{x}^{(n)}),$$

где  $\lambda^{(n)}$  — шаг поиска, выбор которого определяет различные варианты алгоритма поиска. Например, в **методе наискорейшего спуска**  $\lambda^{(n)}$  выбирается таким, чтобы минимизировать функцию  $J(\mathbf{x})$  вдоль найденного градиентного направления  $\nabla J(\mathbf{x}^{(n)})$ .

• **Метод сопряженных направлений** определяет последовательность точек поиска по правилу

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \lambda^{(n)} \mathbf{S}(\mathbf{x}^{(n)});$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}^{(0)}) = \nabla J(\mathbf{x}^{(0)});$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}^{(n)}) = \nabla J(\mathbf{x}^{(n)}) - \beta^{(n-1)} \mathbf{S}(\mathbf{x}^{(n-1)}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $\lambda^{(n)}$  выбирается, как в методе наискорейшего спуска, а

$$\beta^{(n-1)} = \|\nabla J(\mathbf{x}^{(n)})\|^2 / \|\nabla J(\mathbf{x}^{(n-1)})\|^2.$$

Метод сопряженных направлений эффективнее градиентных методов и ненамного их сложнее, более того, процесс поиска экстремума квадратичных форм независимо от выбора координат всегда сходится за не более чем  $m$  шагов.

• **Метод Ньютона-Рафсона** определяет последовательность точек поиска по правилу

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \nabla J(\mathbf{x}^{(n)}) (\nabla^2 J(\mathbf{x}^{(n)}))^{-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\nabla^2 J(\mathbf{x}^{(n)})$  — матрица Гессе функции  $J(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}^{(n)}$ .

• **Прямые методы поиска** [15] не используют производных. Вектор перехода из одной итеративной точки в другую определяется либо выбором среди альтернативных координатных направлений "наилучшего" (**алгоритм Хука-Дживса**), либо построением многомерных симплексов (**алгоритм Нелдера-Мида**), либо рандомизацией возможных направлений (**алгоритм случайного поиска**).

## Примеры

1. Рассматривается экстремальная система управления (см. рис. 122), в которой

$$W_1(s) = 1/s; \quad J(x) = -x^2; \quad W_2(s) = 1/(s + 1)$$

и регулятор реализует метод поиска с запоминанием экстремума. Относительная погрешность определения экстремума не более 0,2. Необходимо построить переходный процесс стабилизации экстремума и найти параметры установившихся автоколебаний системы.

Уравнения движения системы во временной области принимают вид

$$y' + y = -x^2;$$

$$x = x_0 + ut, \quad u = \pm 1.$$

Знак управления в силу выбранного метода поиска экстремума с запоминанием определяется тем, на какой ветви экстремальной характеристики осуществляется поиск. Пусть поиск

начинается из точки  $x_0 = -2$ , расположенной на характеристике слева от экстремума. Для этого случая  $u = 1$ , иначе, когда поисковое движение начинается с правой ветви характеристики, управление принимает противоположное значение.

В общем случае уравнение движения системы имеет вид

$$y' + y = -(x_0 + ut)^2.$$

Найдем решение этого уравнения, а затем составим из его кусков частное движение поиска.

Уравнение движения системы является уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной, поэтому его можно переписать в дифференциальной форме:

$$dy + (y + (x_0 + ut)^2)dt = 0.$$

Поскольку это уравнение не удовлетворяет условиям представления в полных дифференциалах, введем [6] интегрирующий множитель  $m = e^t$ , после чего исходное уравнение принимает вид

$$e^t dy + e^t (y + (x_0 + ut)^2) dt = 0,$$

удовлетворяющий необходимому и достаточному условию искомого представления. Решение этого уравнения в общем виде находится интегрированием:

$$\int_0^t e^t (y_0 + (x_0 + ut)^2) dt + \int_{y_0}^y e^t dy = 0.$$

Найденное решение принимает вид

$$y - y_0 + u^2 t^2 + 2u(x_0 - u)(t - 1 + e^{-t}) = 0,$$

поэтому для первого шага поиска из точки  $(x_0 = -2, y_0 = -4)$  при  $u = 1$  движение системы описывается уравнением

$$y = -t^2 + 6t + 6e^{-t} - 10.$$

РИС. 125

Движение первого шага заканчивается, когда  $y(t)$  пройдет максимум на величину допустимой погрешности 0,2 ед. Это произойдет в момент  $t_1 = 1,3$  с. Второй шаг поиска начинается из точки  $(x_1 = 1,3, y_1 = -0,9)$  и соответствует  $u = -1$ . При этом движение системы на втором шаге поиска описывается уравнением

$$y = -t^2 + 4,6t + 4,6e^{-t} - 5,5,$$

которое получено аналогично первому. Процесс вычисления следует продолжить до тех пор, пока будет ощутимо допустимое различие в результатах. Процесс поиска заканчивается установлением устойчивых автоколебаний, которые описываются уравнениями

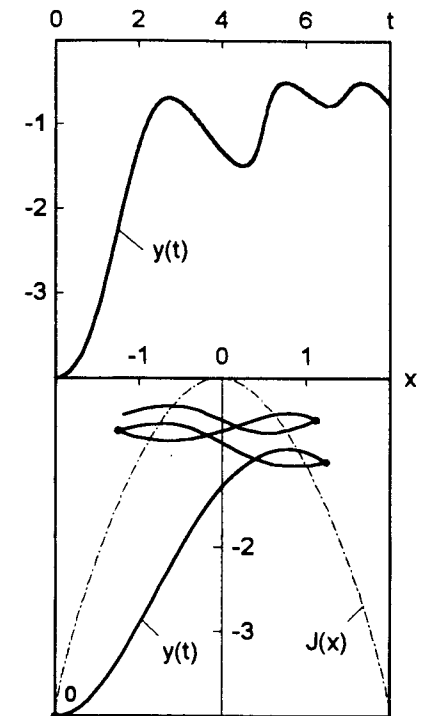
$$y(x) = -(x - u)^2 + 5e^{-ux} + 0,583, \quad u = \pm 1.$$

На рис. 125 представлены график изменения выходной координаты экстремальной системы  $y(t)$  и переходная фазовая кривая  $y(x)$ , по которым можно определить параметры установившихся автоколебаний: амплитуду  $x_m = 1,15$  и частоту  $\omega_a = 2,73 \text{ с}^{-1}$ , поскольку период автоколебаний равен  $2x_m$ .

2. Выполним, используя **алгоритм золотого сечения**, несколько шагов одномерного поиска максимума функции  $J(x) = -\sin \pi x / (\pi x)$  на интервале  $[0,8; 1,7]$ .

На первом шаге поиска:

$$a = 0,8; \quad b = 1,7; \quad (b - a) = 0,9,$$



поэтому

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= a + (b - a)(2 - \sigma) = 1,1438; \\x_2^{(1)} &= a + (b - a)(\sigma - 1) = 1,3562; \\ \sigma &= 1,618034.\end{aligned}$$

В этих точках функция  $J(x)$  принимает значения  $J(x_1^{(1)}) = 0,1215$ ,  $J(x_2^{(1)}) = 0,2112$ ; на этом основании интервал неопределенности оказывается  $[1,1438; 1,7]$  и его длина равна  $0,5562$ .

На втором шаге поиска:

$$a = 1,1438; \quad b = 1,7; \quad (b - a) = 0,5562,$$

поэтому

$$x_1^{(2)} = 1,3562; \quad x_2^{(2)} = 1,4876.$$

В этих точках функция  $J(x)$  принимает значения  $J(x_1^{(2)}) = 0,2112$ ,  $J(x_2^{(2)}) = 0,2138$ ; на этом основании интервал неопределенности оказывается  $[1,3562; 1,7]$  и его длина равна  $0,3438$ .

На третьем шаге поиска:

$$a = 1,3562; \quad b = 1,7; \quad (b - a) = 0,3438,$$

поэтому

$$x_1^{(3)} = 1,4876; \quad x_2^{(3)} = 1,5687.$$

В этих точках функция  $J(x)$  принимает значения  $J(x_1^{(3)}) = 0,2138$ ,  $J(x_2^{(3)}) = 0,1982$ ; на этом основании интервал неопределенности оказывается  $[1,3562; 1,5687]$  и его длина равна  $0,2125$ . Процедуру поиска следует продолжать до достижения заданной точности, которую можно оценивать величиной модуля разности  $|J(x_1^{(k)}) - J(x_2^{(k)})|$  или длиной интервала неопределенности.

3. Выполним, используя некоторые алгоритмы векторной оптимизации, один шаг поиска минимума функции:

$$J(x) = x_1^2 + 0,5x_2^2 + x_3^2 \text{ из начальной точки } x^{(0)} = (1 \quad -2 \quad 3)^T.$$

Воспользуемся алгоритмом наискорейшего спуска.

Найдем текущий вектор градиента  $\nabla J(x) = (2x_1 \quad x_2 \quad 2x_3)^T$  и его значение в начальной точке:  $\nabla J(x^{(0)}) = (2 \quad -2 \quad 6)^T$ . Чтобы найти точку  $x^{(1)}$ , необходимо выбрать  $\lambda^{(0)}$ . Найдем значение этого параметра так, чтобы минимизировать  $J(x; \lambda)$  по  $\lambda$  вдоль направления  $\nabla J(x^{(0)})$ . Для этого воспользуемся необходимым условием минимума:

$$\begin{aligned}dJ(x^{(0)} - \lambda \nabla J(x^{(0)}))/d\lambda &= 0; \\ dJ(x^{(0)} - \lambda \nabla J(x^{(0)}))/d\lambda^{(0)} &= \\ &= d((1 - 2\lambda)^2 + 2(-2 + 2\lambda)^2 + (3 - 6\lambda)^2)/d\lambda = 0,\end{aligned}$$

откуда следует, что  $\lambda^{(0)} = 0,5833$ .

$$\text{Поэтому } x^{(1)} = (-0,1666 \quad -0,8334 \quad -0,4998)^T.$$

В этой точке значение  $J(x^{(1)}) = 0,6249$ , тогда как в начальной точке поиска  $J(x^{(0)}) = 12$ .

Воспользуемся алгоритмом Ньютона.

Построим матрицу Гессе:

$$\nabla^2 J(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

которая оказалась постоянной. Найдем вектор перехода из  $x^{(0)}$  для первого шага процедуры поиска:  $(\nabla^2 J(x^{(0)}))^{-1} \nabla J(x^{(0)}) = (-1 \quad 2 \quad -3)^T$ . Поэтому  $x^{(1)} = (0 \quad 0 \quad 0)^T$ . Минимум найден за один шаг!

### 15.3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ В ЗАМКНУТОМ КОНТУРЕ

Идентификация является одной из главных процедур адаптации, предназначение которой состоит в определении отдельных характеристик и параметров системы, характеристик возмущений и оценок показателей качества управляемого про-

цесса. Результаты идентификации являются основанием для перестройки структуры и коэффициентов регулятора с целью улучшения процесса управления.

Простейшая идентификация в адаптивных системах реализуется в виде прямого или косвенного измерения параметров, но все же главная задача идентификации в адаптивных системах — это определение параметров основной системы по входным, выходным переменным и координатам состояния.

Вот известный пример идентификации коэффициента усиления к модели инерционного звена  $Ty' + y = ku$ , если известна постоянная времени  $T$  этой модели. Искомое значение коэффициента усиления находят после интегрирования по времени модели звена:

$$k = (T(y - y_0) + \int_0^t y dt) / \int_0^t u dt.$$

Устройство идентификации реализует эту формулу.

В случае идентификации более одного параметра в динамических моделях дробно-рационального вида используют специальные фильтры. Например, пусть передаточная функция объекта второго порядка известна с точностью до двух параметров:

$$W(s; a_1, a_2) = 1/N(s) = 1/(s^2 + a_1s + a_2).$$

Подключим к выходу и входу этого звена, как показано на рис. 126, две пары произвольных фильтров с передаточными функциями:

$$1/F_1(s), 1/F_2(s);$$

$$F_1(s) = s^2 + \alpha_{11}s + \alpha_{21};$$

$$F_2(s) = s^2 + \alpha_{12}s + \alpha_{22}.$$

Найдем взаимосвязь выходных сигналов фильтров:

$$Y_1(s) = U(s)/(N(s)F_1(s));$$

$$U_1(s) = U(s)/F_1(s) - Y(s);$$

$$Y(s) = U(s)/N(s),$$

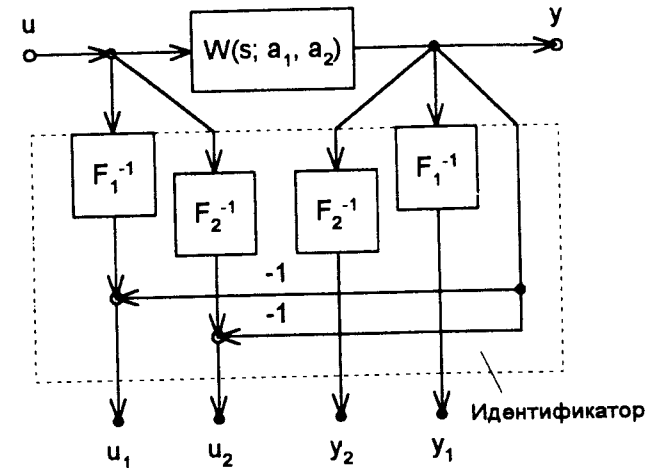


РИС. 126

тогда

$$U_1(s) = Y_1(s)(N(s) - F_1(s)) = Y_1(s)((a_1 - \alpha_{11})s + (a_2 - \alpha_{21})).$$

Отсюда находим, что

$$u_1(t) = (a_1 - \alpha_{11})y_1'(t) + (a_2 - \alpha_{21})y_1(t),$$

аналогично

$$u_2(t) = (a_1 - \alpha_{12})y_2'(t) + (a_2 - \alpha_{22})y_2(t).$$

Сигналы  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  измеряются, а  $y_1'(t)$ ,  $y_2'(t)$  вычисляются, поэтому система двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров  $a_1$ ,  $a_2$  разрешима.

Для идентификации параметров систем в темпе реального времени путем цифровой обработки данных, непосредственно поступающих от системы, используются **рекуррентные алгоритмы оценивания**. Пусть дискретная идентифицируемая система представлена своей линейной разностной моделью:

$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_ny(k-n) = b_1u(k-1) + \dots + b_nu(k-n).$$

Задача идентификации состоит в определении коэффициентов  $a_i, b_i$  этой модели по результатам  $\{y(k)\}, \{u(k)\}$  измерений входа и выхода. Пусть на  $k$ -м такте по результатам измерений входа и выхода вычислены оценки коэффициентов  $\underline{a}_i(k-1), \underline{b}_i(k-1)$ , подставим эти оценки в модель системы:

$$y(k) + \underline{a}_1(k-1)y(k-1) + \dots + \underline{a}_n(k-1)y(k-n) = \underline{b}_1(k-1)u(k-1) + \dots + \underline{b}_n(k-1)u(k-n) + \varepsilon(k).$$

Здесь величина  $\varepsilon(k)$  введена в уравнение для того, чтобы учесть ошибки измерений и ошибки вычислений оценок. Выражение

$$-\underline{a}_1(k-1)y(k-1) - \dots - \underline{a}_n(k-1)y(k-n) + \underline{b}_1(k-1)u(k-1) + \dots + \underline{b}_n(k-1)u(k-n) = y(k|k-1)$$

по смыслу является предсказанным в момент  $k-1$  значением выхода  $y(k)$ .

Введем матричную запись основных соотношений, для чего обозначим вектор измерений:

$$\psi(k) = (-y(k-1), -y(k-2), \dots, -y(k-n), u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n))^T$$

и вектор оценок параметров:

$$\alpha(k-1) = (\underline{a}_1(k-1), \underline{a}_2(k-1), \dots, \underline{a}_n(k-1), \underline{b}_1(k-1), \underline{b}_2(k-1), \dots, \underline{b}_n(k-1))^T$$

Теперь

$$y(k|k-1) = \psi^T(k)\alpha(k-1); \quad y(k) = \psi^T(k)\alpha(k-1) + \varepsilon(k).$$

Неизвестный вектор оценок параметров находится из рекуррентного уравнения [14]:

$$\alpha(k+1) = \alpha(k) + \eta(k)(y(k+1) - \psi^T(k+1)\alpha(k)), \quad \alpha(0) = 0,$$

где вектор  $\eta(k)$ , называемый вектором коррекции, определяется соотношением

$$\eta(k) = P(k)\psi(k+1)/(\psi^T(k+1)P(k)\psi(k+1) + 1); \\ P(k) = (E - \eta(k-1)\psi^T(k))P(k-1), \quad P(0) = \gamma E,$$

где  $\gamma$  — произвольное достаточно большое число;  
 $E$  — единичная матрица.

Заметим, что описанный рекуррентный алгоритм работает и в том случае, когда измерения сопровождаются шумами, при этом найденные оценки обладают наименьшей дисперсией, поскольку основное рекуррентное соотношение получено [14] по методу наименьших квадратов.

### Пример

Идентифицируется модель объекта первого порядка с двумя параметрами:

$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1).$$

Вектор параметров и вектор измерений принимают вид соответственно

$$\alpha(k) = (\underline{a}(k), \underline{b}(k))^T; \quad \psi(k) = (-y(k-1), u(k-1))^T.$$

Пусть на момент  $k$  проведены измерения входа и выхода  $\{y(k), u(k)\}$ , найдем величину ошибки оценивания:

$$e(k) = y(k) - \psi^T(k)\alpha(k)$$

и сами оценки параметров:

$$\alpha(k) = \alpha(k-1) + \eta(k-1)e(k), \quad \alpha(0) = 0.$$

Найдем вектор коррекции  $\eta(k-1)$ , для чего определим сначала

$$P(k)\psi(k+1) = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{pmatrix} (-y(k), u(k))^T = \\ = \begin{pmatrix} -p_{11}(k)y(k) + p_{12}(k)u(k) \\ -p_{21}(k)y(k) + p_{22}(k)u(k) \end{pmatrix} = (\theta_1(k) \quad \theta_2(k))^T.$$

Затем

$$\psi^T(k+1)P(k)\psi(k+1) = (-y(k), u(k)) (\theta_1(k) \ \theta_2(k))^T = \omega(k),$$

поэтому

$$\eta(k-1) = (\theta_1(k) \ \theta_2(k))^T / (\omega(k) + 1)$$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad P(k+1) &= (E - \eta(k)\psi^T(k+1))P(k) = \\ &= P(k) - \eta(k)(\psi^T(k+1)P(k)) = \\ &= P(k) - \eta(k)(\theta_1(k) \ \theta_2(k)). \end{aligned}$$

В начальный момент полагаем:  $\alpha(0) = \underline{a}(0) = 0$ ,  $\underline{b}(0) = 0$ ,  $P(0) = \text{diag}(50 \ 50)$ .

## 15.4. АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛЬЮ

Структура адаптивной системы с эталонной моделью представлена на рис. 105. Модель в такой структуре предназначена для имитации идеального движения системы. Отклонение  $\varepsilon(t) = y_m(t) - y(t)$  реального движения  $y(t)$  от идеального  $y_m(t)$  используется в замкнутом контуре для адаптивной подстройки регулятора основной системы. Показатель качества управления  $J(\varepsilon)$  может быть экстремальным или монотонным, в первом случае настройка регулятора выполняется по принципам экстремального регулирования, во втором случае используется принцип управления по отклонению. Закон адаптации и вместе с ним параметры регулятора выбираются так, чтобы обеспечить всей системе асимптотическую устойчивость  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ , для чего используются различные методы анализа устойчивости, в том числе методы А.М. Ляпунова, В.-М. Попова.

### Пример

Пусть основная система содержит объект регулирования с передаточной функцией  $W_o(s; k_o) = k_o/(Ts + 1)$ , известной с точностью до параметра  $k_o$ , который может изменяться в широком диапазоне, оставаясь квазистационарным. Для адаптивной ком-

пенсации изменения коэффициента передачи объекта регулирования выбираем регулятор с передаточной функцией  $W_p(s; \beta) = \beta(t)$ . Эталонную модель принимаем в виде

$$W_m(s; k_m) = k_m/(Ts + 1).$$

Закон адаптации будем выбирать из условия

$$\delta(t) \rightarrow 0, \quad \delta(t) = k_m - k_o\beta(t)$$

и так, чтобы обеспечить всей системе асимптотическую устойчивость по Ляпунову.

Определим ошибку адаптации  $\varepsilon(t) = y_m(t) - y(t)$  и найдем ее модель. Ясно, что

$$\begin{aligned} Ty'(t) + y(t) &= k_o\beta(t)u(t); \\ Ty'_m(t) + y_m(t) &= k_mu(t), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$T\varepsilon'(t) + \varepsilon(t) = \delta(t)u(t).$$

Вся система будет асимптотически устойчива, если модель ошибки адаптации будет асимптотически устойчивой. Следуя прямому методу Ляпунова, используем положительно определенную квадратичную форму вида

$$V(\varepsilon, \delta) = 0,5(\varepsilon^2(t) + \delta^2(t))$$

в качестве функции Ляпунова для модели ошибки адаптации.

Полная производная по времени в силу системы

$$V'(\varepsilon, \delta) = \varepsilon(t) \varepsilon'(t) + \delta(t) \delta'(t) = -\varepsilon^2(t)/T + (\varepsilon(t) u(t)/T + \delta'(t)) \delta(t)$$

будет отрицательно определенной, если, например,  $\delta'(t) = -\varepsilon(t) u(t)/T$ .

Воспользуемся этим условием, чтобы найти закон подстройки регулятора для придания адаптивных свойств системе. В силу квазистационарности параметра  $k_o$  производная  $\delta'(t) = (k_m - k_o\beta(t))' = -k_o\beta'(t)$ , поэтому  $\beta'(t) = \varepsilon(t)u(t)/(Tk_o)$ .

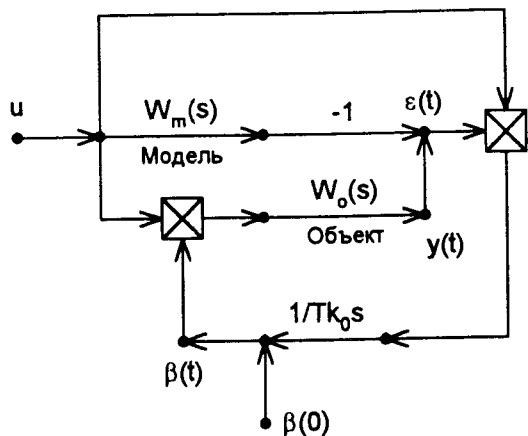


РИС. 127

Искомый закон адаптации принимает вид

$$\beta(t) = \beta(0) + \frac{1}{T_k0} \int_0^t \varepsilon(t)u(t)dt.$$

На рис. 127 приведена структура синтезированной адаптивной

системы. Использование микропроцессорных вычислительных средств в контуре управления позволяет реализовывать алгоритмы адаптации, требующие сложных расчетов, например вычисления дополнительного управляющего сигнала  $z(t) = z(u(t), y(t), \varepsilon(t))$  как функции сигналов входа, выхода и рассогласования. В этом случае динамика основной системы описывается линейной моделью

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t) + gz(t),$$

эталонная модель системы — уравнением

$$y'_m(t) = A_m y_m(t) + B_m u(t).$$

Представим динамическую модель рассогласования

$\varepsilon(t) = y_m(t) - y(t)$  в виде

$$\varepsilon'(t) = A_m \varepsilon(t) - \Delta A y(t) - \Delta B u(t) - gz(t),$$

где  $\Delta A = A(t) - A_m$ ;  $\Delta B = B(t) - B_m$ .

Цель синтеза адаптивной системы состоит в том, чтобы путем подбора дополнительного управляющего сигнала  $z(t)$  обеспечить асимптотическую устойчивость всей системы.

Будем искать функцию Ляпунова в виде положительно определенной квадратичной формы от рассогласования:

$$V = \varepsilon^T(t)P\varepsilon(t),$$

полная производная которой в силу системы оказывается отрицательно определенной.

$$V' = -\varepsilon^T(A^T P + PA)\varepsilon - 2\varepsilon^T P(\Delta A y - \Delta B u - gz(t)).$$

Поскольку матрица  $P$  является положительно определенной, то и матрица  $A^T P + PA$  также положительно определенная, поэтому для отрицательной определенности  $V'$  достаточно, чтобы скалярная функция

$$\varepsilon^T P(\Delta A y + \Delta B u + gz(t)) \geq 0.$$

Из последнего условия находят искомое выражение для дополнительного управляющего сигнала  $z(t)$ .

### Пример

Рассмотрим результаты синтеза адаптивной системы стабилизации [4] перегрузки при различных режимах продольного движения самолета.

Линейная модель динамики системы стабилизации перегрузки, которая включает модель динамики движения самолета, модель сервопривода и модели корректирующих звеньев, имеет седьмой порядок и меняется в зависимости от режима полета. Эталонная модель системы строится по номинальному режиму полета и принята третьего порядка. Контур адаптации содержит микропроцессор для расчета управляющего сигнала  $z(t)$ , который подается дополнительно с основным на вход сервомеханизма.

Выражение для дополнительного управляющего сигнала имеет вид

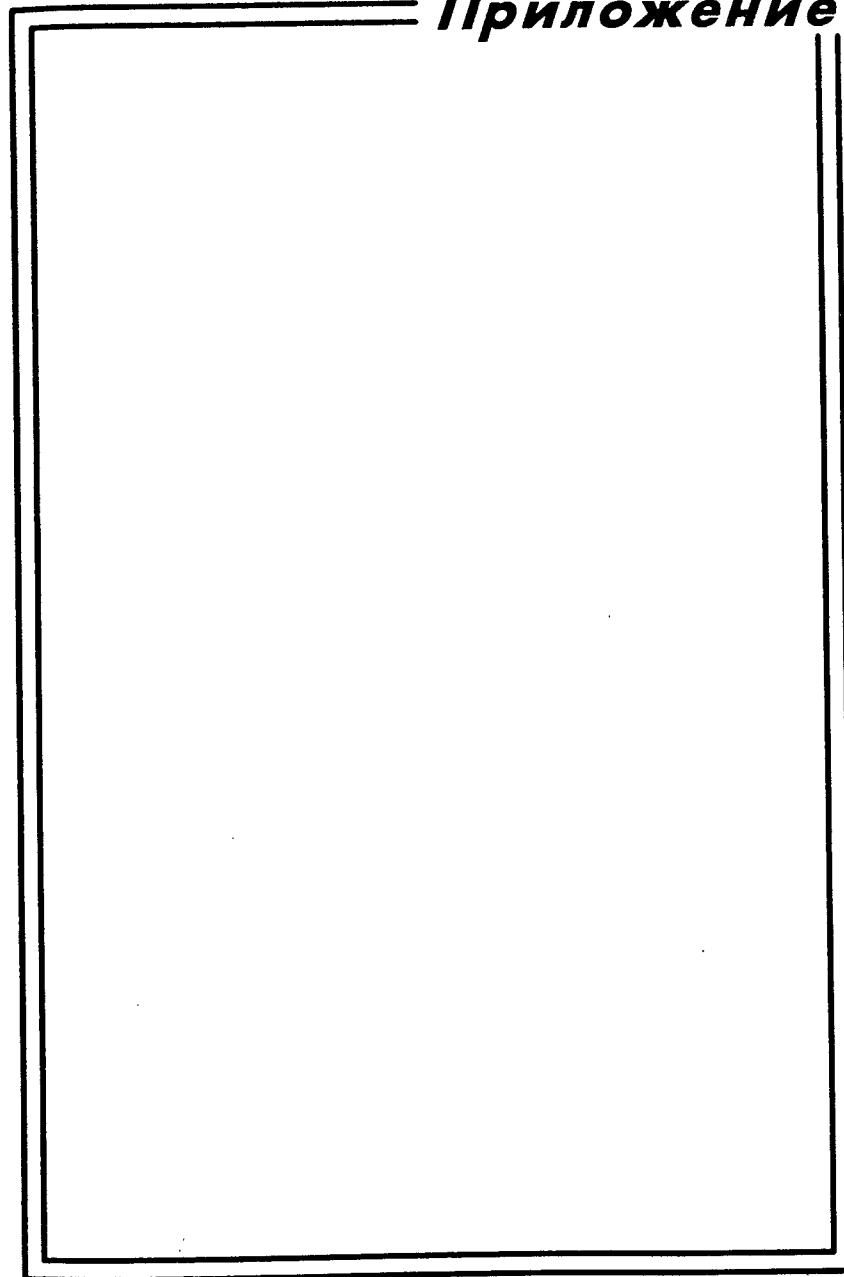
$$z(t) = ((8,16 \ 0,51 \ 3,64) |\varepsilon(t)| + (8,69 \ 1,44 \ 12,93) |y(t)|) \operatorname{sgn}((3,52 \ 1,09 - 1,52)\varepsilon(t),$$

где вектор рассогласования  $\varepsilon(t)$  определяется тремя координатами эталонной модели и соответствующими им  $y(t)$ -реальными координатами основной системы.

Использование контура адаптации позволило практически исключить различие в переходных процессах стабилизации на различных режимах полета.

Рассмотренные методы позволяют проектировать адаптивные системы со свойством локальной нечувствительности к нестационарности модели, к ограниченным возмущениям и помехам. Адаптивные системы, существенно нечувствительные к изменению модели, возмущениям и помехам, в современной теории управления называют *робастными*, или *грубыми*. Свойство робастности есть способность системы сохранять свои свойства и показатели качества в условиях достаточно больших параметрических, структурных и сигнальных возмущений. Методы анализа и синтеза робастных систем представляют собой актуальную область современных исследований теории управления.

## Приложение





# 16 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

## 16.1. МАТРИЦЫ

*Основные понятия — Основные операции — Характеристические числа матрицы — Линейные и квадратичные формы — Функции от матриц — Дифференцирование и интегрирование матриц — Нормы векторов и матриц — Примеры.*

### 16.1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

**Матрицей** размера  $m \times n$  называют упорядоченную совокупность  $mn$  чисел  $a_{ij}$ , действительных или комплексных, помещенных в прямоугольную таблицу из  $m$  строк и  $n$  столбцов:

$$A = (a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n) = (a_{ij})_{m \times n}.$$

Числа  $a_{ij}$  называются **элементами** матрицы. Элемент  $a_{ij}$  расположен на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы. Если  $m = n$ , то матрица называется **квадратной порядка  $n$** , **вектор-столбец** является матрицей размером  $m \times 1$ , **вектор-строка** —  $1 \times n$  матрицей, **скаляр** —  $1 \times 1$  матрицей.

Квадратная матрица, в которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, называется **диагональной**:

$$M = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

Диагональная матрица вида  $E = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$  называется **единичной**.

**Транспонированная** к  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  матрица имеет вид  $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$ , квадратная матрица называется **симметрической**, если  $A = A^T$ , **кососимметрической**, если  $A = -A^T$ .

- 
- 16.1. МАТРИЦЫ
- 
- 16.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
- 
- 16.3. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
- 
- 16.4. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ
- 
- 16.5. ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА  
ДЛЯ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Квадратная матрица называется **вырожденной, особенной** или **сингулярной**, если ее определитель равен нулю, в противном случае, когда  $\det A \neq 0$ , матрица называется **невырожденной, неособенной** или **несингулярной**.

**Алгебраическим дополнением**  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$  называют определитель матрицы, полученный вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца и умноженный на  $(-1)^{i+j}$ .

**Определитель** матрицы можно вычислить по формуле разложения Лапласа:

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

**Присоединенной матрицей** для квадратной матрицы  $A$  называют матрицу  $\text{adj } A$ , полученную путем замены каждого элемента его алгебраическим дополнением и последующим транспонированием. Для неособенной матрицы  $A$  существует единственная **обратная**  $A^{-1}$ , которую находят по выражению

$$A^{-1} = \text{adj } A / \det A.$$

### 16.1.2. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Простейшие операции над матрицами — **сложение** и **умножение матриц, умножение матрицы на число**. Две матрицы одного размера **равны**, если равны их соответствующие элементы.

**Сложение матриц** определяется как поэлементное сложение матриц одинакового размера:  $A_{m \times n} + B_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})$ .

**Умножение матриц** выполняется по правилу

$$A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}; \quad C = (c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}),$$

где  $a_{ik}, b_{kj}$  — элементы матриц  $A, B$  соответственно.

Операция перемножения определяется только для **согласованных** матриц, когда число столбцов левого сомножителя совпадает с числом строк правого сомножителя.

**Умножение матрицы** на число определяется как  $\alpha A = (\alpha a_{ij})$ .

Основные свойства операций:

$$A + B = B + A, (A + B) + C = A + (B + C);$$

$$(AB)C = A(BC);$$

$$(A + B)C = AC + BC,$$

в общем случае  $AB \neq BA$ ,

$$\alpha A = A\alpha, (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,$$

кроме того, справедливо:

$$(A + B)^T = A^T + B^T; (AB)^T = B^T A^T;$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}; (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Матрица  $A$  называется **ортогональной**, если  $A^T = A^{-1}$ .

**Скалярное произведение** векторов  $x$  и  $y$  в матричной записи определяется как  $x^T y = y^T x$ . Два вектора называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю. **Диадическое произведение** векторов  $x$  и  $y$  определяется как  $xy^T$ . Если векторы одной размерности, то диадическое произведение является квадратной матрицей.

### 16.1.3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА МАТРИЦЫ

Для квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$  функция  $\varphi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$  относительно параметра  $\lambda$  есть многочлен степени  $n$ , который называют **характеристическим многочленом матрицы A**. Корни характеристического многочлена называются **собственными**, или **характеристическими, числами** матрицы  $A$ .

Собственные числа матрицы могут быть действительными или комплексными, простыми или кратными. Симметрическая матрица с действительными элементами имеет только действительные собственные числа. Совокупность всех собственных чисел матрицы называют **спектром матрицы**.

Сумму диагональных элементов квадратной матрицы  $A$  называют **следом** матрицы и обозначают  $\text{tr } A$ . Справедливо:  $\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B$ ,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ . След диадического произведения векторов одной размерности совпадает со скалярным произведением этих векторов:  $\text{tr}(xy^T) = x^T y$ .

**Рангом** матрицы  $A$  называют наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы и обозначают  $\text{rang } A$ . Квадратная матрица порядка  $n$  является невырожденной в том и только в том случае, если  $\text{rang } A = n$ .

Две квадратные матрицы  $A, B$  одинаковых размеров называются **подобными**, если существует такая невырожденная матрица  $P$ , что  $B = P^{-1}AP$ . Подобные матрицы имеют одинаковый след, ранг, определитель и характеристические числа.

#### 16.1.4. ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Матричная запись вектора принята в виде матрицы-столбца  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , поэтому преобразование вектора  $x$  в вектор  $y$ , осуществляемое матрицей  $A$ , записывается в виде  $y = Ax$ .

Выражение  $L(x) = mx$  называется **линейной формой** вектора  $x$ . В скалярной записи линейная форма имеет вид

$$L(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n m_i x_i.$$

Матрица  $m = (m_i)_{1 \times n}$  является матрицей-строкой.

Выражение  $G(x) = x^T Qx$  называется **квадратичной формой** вектора  $x$ . В скалярной записи квадратичная форма имеет вид

$$G(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j.$$

Матрица  $Q$  является симметрической.

Квадратичная форма считается **положительно определенной**, если

$$G(x) > 0; \quad x \neq 0; \quad G(0) = 0.$$

Квадратичная форма считается **положительно полуопределенной**, если

$$G(x) \geq 0; \quad x \neq 0; \quad G(0) = 0.$$

Аналогично определяется отрицательная определенность квадратичной формы.

Условием положительной определенности квадратичной формы является **критерий Сильвестра**:

*Квадратичная форма  $x^T Qx$  положительно определенная, если все главные диагональные определители матрицы  $Q$  положительны.*

#### 16.1.5. ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦ

**Многочленом степени  $n$  от матрицы  $A$**  называется выражение

$$P(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n E,$$

**экспоненциалом матрицы  $A$**  называют степенной ряд

$$e^A = E + A + A^2/2! + A^3/3! + \dots,$$

который сходится абсолютно и равномерно.

**Теорема (А. Кэли, У. Гамильтон, 1841)**

*Любая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению.*

Если  $\varphi_A(\lambda)$  — характеристический многочлен матрицы  $A$ , то  $\varphi_A(A) = 0$ .

### 16.1.6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ МАТРИЦ

Дифференцирование и интегрирование матриц по скалярному параметру, например по времени или векторному аргументу, выполняется по обычным правилам, но с учетом порядка следования и условий согласованности произведения матриц:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(t) &= (a'_{ij}(t)); \quad \int \mathbf{A}(t) dt = (\int a_{ij}(t) dt); \\ (\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t))' &= \mathbf{A}'(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{B}'(t); \\ d(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y})/dx &= \mathbf{A} \mathbf{y}; \quad d(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y})/dy = \mathbf{x}^T \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Дифференцирование скалярной функции  $f(\mathbf{x})$  по векторному аргументу  $\mathbf{x}$  определяется как градиент этой функции:

$$\partial f(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x} = (\partial f(\mathbf{x})/\partial x_1, \dots, \partial f(\mathbf{x})/\partial x_n)^T = \mathbf{grad} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}).$$

Вторая производная скалярной функции  $f(\mathbf{x})$  по векторному аргументу  $\mathbf{x}$  представляется  $n \times n$ -симметричной *матрицей Гессе*:

$$\partial^2 f(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}^2 = (\partial^2 f(\mathbf{x})/\partial x_i \partial x_j) = (\partial \nabla f(\mathbf{x})/\partial x_1, \dots, \partial \nabla f(\mathbf{x})/\partial x_n)^T.$$

Дифференцирование векторной функции  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))^T$  по векторному аргументу  $\mathbf{x}$  определяется *матрицей Якоби*:

$$\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x} = (\nabla f_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla f_n(\mathbf{x}))^T.$$

Линейное представление скалярной функции векторного аргумента  $f(\mathbf{x})$  на основе разложения в ряд Тейлора в локальной окрестности вектора  $\mathbf{x}^0$  имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \nabla^T f(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0),$$

линейное представление векторной функции векторного аргумента  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  на основе разложения в ряд Тейлора в локальной окрестности вектора  $\mathbf{x}^0$  имеет вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^0) + (\nabla f_1(\mathbf{x}^0), \dots, \nabla f_n(\mathbf{x}^0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0).$$

### 16.1.7. НОРМЫ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ

Норма вектора является обобщением понятия модуля числа. Норма вектора позволяет сравнивать длины векторов, определять расстояния между ними, выполнять оценки, формировать критерии.

*Нормой вектора*  $\mathbf{x}$  называют действительное число, обозначаемое  $\|\mathbf{x}\|$ , которое обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \|0\| &= 0, \quad \|\mathbf{x}\| > 0, \quad \text{если } \mathbf{x} \neq 0; \\ \|\alpha \mathbf{x}\| &= |\alpha| \|\mathbf{x}\|; \\ \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &\leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \end{aligned}$$

для любых векторов  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  и чисел  $\alpha$ . Третье свойство называют *аксиомой треугольника*.

Нормы вектора могут задаваться различными способами. Общий вид нормы вектора  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  имеет так называемая *норма Гёльдера*:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Наиболее известны три гёльдеровы нормы: при  $p = 1$  норма вектора равна сумме модулей его координат, при  $p = 2$  имеем *евклидову норму* — корень квадратный из суммы квадратов координат, при  $p \rightarrow \infty$  норма вектора равна максимуму модулей координат вектора:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|; \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Вектор, норма которого равна единице, называется *нормированным*. Любой ненулевой вектор  $\mathbf{x}$  можно нормировать, умножив его на число  $\|\mathbf{x}\|^{-1}$ . Если под нормой вектора понимать его длину, то расстояние между векторами  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  совпадает с нормой разности этих векторов.

**Нормой матрицы  $A$**  называется вещественное число  $\|A\|$ , которое обладает свойствами:

$$\|0\| = 0, \quad \|A\| > 0, \quad \text{если } A \neq 0;$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|;$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|; \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

для любых матриц  $A, B$  и чисел  $\alpha$ .

Для произвольной  $m \times n$ -матрицы  $A = (a_{ij})$  ее норма может быть вычислена по одной из формул:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|; \quad \|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|;$$

$$\|A\|_2 = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{0.5};$$

$$\|A\|_\infty = (nm)^{0.5} \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Третья из этих норм называется **евклидовой нормой матрицы**.

### 16.1.8. ПРИМЕРЫ

1. Характеристический многочлен матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 2 & -3 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -3 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Спектр собственных значений этой матрицы содержит три простых корня:  $\{1, -2, 3\}$ .

2. Определить ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Наибольшая квадратная подматрица имеет порядок, равный трем. Все подматрицы третьего порядка имеют нулевой определитель, среди квадратных подматриц второго порядка есть невырожденные. Значит, ранг матрицы равен двум.

3. Для матрицы второго порядка  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  характеристический многочлен может быть представлен в виде

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A,$$

а обратная матрица равна

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} / \det A.$$

4. В общем случае для матрицы порядка  $n$  характеристический многочлен имеет вид

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n.$$

Здесь  $a_1 = -\text{tr } A$ ,  $a_n = (-1)^n \det A$ , а это значит, что  $\sum \lambda_i = \text{tr } A$ ,  $\prod \lambda_i = \det A$ .

5. Используя теорему Кэли—Гамильтона, можно вычислять степени матрицы и обратную. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда  $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 2$ . По теореме Кэли—Гамильтона  $A^2 - 5A + 2E = 0$ , поэтому  $A^2 = 5A - 2E$ , а значит,  $A^3 = 5A^2 - 2A = 5(5A - 2E) - 2A = 23A - 10E, \dots$ . Найдем обратную матрицу. Умножив исходное тождество на  $A^{-1}$ , получим  $A - 5E + 2A^{-1} = 0$ , откуда  $A^{-1} = 2,5E - 0,5A$ .

6. Записать линейную форму с матрицей  $m = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 14 \end{pmatrix}$ .  
Записать квадратичную форму с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Является ли эта форма знакоопределенной?

Линейная форма имеет вид  $L(x) = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3$ , искомая квадратичная форма

$$G(x) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 6x_2x_3 - x_3^2$$

не является знакоопределенной, поскольку критерий Сильвестра не выполняется ни для положительной, ни для отрицательной определенности.

7. Заметим, что норма вектора  $x$  — это не только его длина, но и расстояние между нулевым вектором и вектором  $x$ , поэтому множество векторов, для которых  $\|x\| = 1$ , можно интерпретировать как "сферу единичного радиуса" с центром в начале координат. Используя разные нормы, будем иметь различные "сферы", так, на плоскости "сфера" в смысле  $\|x\|_2$  — это окружность  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , но в смысле нормы  $\|x\|_1$  — это ромб  $|x_1| + |x_2| = 1$ ; если использовать  $\|x\|_\infty$ , то "сфера" принимает форму квадрата  $\max(|x_1|, |x_2|) = 1$ .

## 16.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

**Преобразование Лапласа — Примеры — Z-преобразование — Примеры.**

### 16.2.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

**Преобразование Лапласа** устанавливает соответствие между функцией  $f(t)$  действительного переменного  $t$ , называемой **оригиналом**, и функцией  $F(s)$  комплексного переменного  $s = \sigma + j\omega$ , называемой **изображением**.

Изображением, по Лапласу, функции  $f(t)$ , определенной на положительной полуоси  $t > 0$ , называют выражение

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s).$$

Обратное преобразование Лапласа, определяющее по изображению  $F(s)$  оригинал  $\gamma$ , может быть найдено по формуле

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 1/(2\pi j) \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds = f(t),$$

где  $\sigma > 0$  определяет область сходимости преобразования.

Преобразование Лапласа обладает свойствами:

а) $\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s);$ б) $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0);$ в) $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = F(s)/s;$ г) $\mathcal{L}[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s + \alpha);$	д) $\mathcal{L}[t f(t)] = -dF(s)/ds;$ е) $\mathcal{L}[f(t/\alpha)] = \alpha F(\alpha s);$ ж) $\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(s)F_2(s);$ з) $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s),$ $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s).$
---	---

### 16.2.2. ПРИМЕРЫ

- $\mathcal{L}[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t)e^{-st} dt = 1/s$  — по определению;
- $\mathcal{L}[e^{-\alpha t}] = 1/(s + \alpha)$  — по свойству г);
- $\mathcal{L}[\sin \omega t] = \text{Im} \mathcal{L}[e^{j\omega t}] = \text{Im} 1/(s - j\omega) = \omega/(s^2 + \omega^2)$  — по свойству а);
- $\mathcal{L}^{-1}[(s^2 + 0,5s + 1)/(s^2(s + 2))] = \mathcal{L}^{-1}[0,5/s^2 + 1/(s + 2)] = 0,5t + e^{-2t}.$

### 16.2.3. Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Дискретным аналогом преобразования Лапласа является Z-преобразование. Это преобразование устанавливает соответствие между дискретной функцией  $f(kh) = f(t)$ ,  $t = kh$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

называемой *оригиналом*, и функцией  $F(z)$  комплексного переменного  $z$ , называемой *дискретным изображением*.

Z-преобразование определяется соотношением

$$\mathbf{Z}\{f(t), t = kh\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh)z^{-k} = F(z).$$

Обратное Z-преобразование осуществляется по формуле

$$\mathbf{Z}^{-1}[F(z)] = 1/(2\pi j) \oint F(z)z^{k-1}dz = f(kh),$$

в ней круговой интеграл берется по замкнутому контуру, который заключает все особые точки функции  $F(z)$ .

Z-преобразование обладает свойствами:

а)  $\mathbf{Z}\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} = \alpha F_1(z) + \beta F_2(z);$

б)  $\mathbf{Z}\{f(t+h)\} = zF(z) - zf(0);$   
 $\mathbf{Z}\{f(t+mh)\} = z^m(F(z) - F_1(z)),$

где  $F_1(z) = \sum_{n=0}^{m-1} f(nh)z^{-n};$

$\mathbf{Z}\{f(t-h)\} = z^{-1}F(z);$

в)  $\mathbf{Z}\{\sum_{k=0}^{\infty} f(kh)\} = z/(z-1)F(z);$

г)  $\mathbf{Z}\{e^{-at}f(t)\} = F(e^{-ah}z);$

д)  $\mathbf{Z}\{t f(t)\} = -hzdF(z)/dz;$

е)  $\mathbf{Z}\{\alpha^t f(t)\} = F(z/\alpha^h);$

ж)  $\mathbf{Z}\{\sum_{n=0}^{\infty} f_1(t-nh)f_2(nh)\} = F_1(z)F_2(z);$

з)  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z);$

$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)/z)F(z).$

Z-преобразование  $F(z)$  непрерывной функции  $f(t)$  может быть найдено по известному преобразованию Лапласа  $F(s)$  этой функции. Если функция  $F(s) = B(s)/A(s)$  имеет  $m$  простых полюсов, то искомое Z-преобразование может быть вычислено по выражению

$$F(z) = \sum_{k=1}^m B(\zeta_k)/A'(\zeta_k)(1 - e^{-\zeta_k h})z^{-1},$$

где  $\zeta_k$  —  $k$ -й простой полюс функции  $F(s)$ .

## 16.2.4. ПРИМЕРЫ

1.  $\mathbf{Z}\{1(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1(t)z^{-k} = z/(z-1), |z| < 1$  — по определению.

2.  $\mathbf{Z}\{kh\} = hz^{-1} + 2hz^{-2} + \dots = hz/(z-1)^2$  — по определению.

3.  $\mathbf{Z}\{e^{-akh}\} = z/(z - e^{-ah})$  — по свойству г).

4.  $\mathbf{Z}\{1(t-h)\} = 1/(z-1)$  — по свойству б).

5.  $\mathbf{Z}^{-1}\{2z^{-1}/(1-3z^{-1}+2z^{-2})\} = \mathbf{Z}^{-1}\{2z^{-1}+6z^{-2}+14z^{-3}+\dots\}$ . Выражение в скобках получено прямым делением, поэтому по свойству а) имеем:  $f(0) = 0; f(1) = 2, f(2) = 6; f(3) = 14$ .

## 16.3. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

*Оптимизация функций — Вариационные методы. Оптимизация функционалов — Принцип максимума Понтрягина — Метод динамического программирования.*

### 16.3.1. ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Формально достаточно общие задачи на отыскание максимума или минимума функции записываются в виде

$$F(x) \rightarrow \text{extr}, x \in V;$$

"найти в множестве  $V$  точку  $x$ , при которой скалярная функция векторного аргумента  $F(x)$  принимает экстремальное значение". При этом точки  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in V$  называют *допустимыми*, множество  $V$  называют *ограничением*. Если  $V = \mathbb{R}^n$ , то задача не имеет ограничений.

*Задачу на максимум* можно свести к задаче на минимум, заменив задачу  $F(x) \rightarrow \max, x \in V$  на задачу —  $F(x) \rightarrow \min, x \in V$ . Точку  $x^*$ , такую, что  $x \in V, F(x^*) \geq F(x)$ , называют *решением* задачи на максимум, а величину  $F(x^*) = F_{\max}$  называют *значением задачи*.

Для отыскания решения экстремальной задачи без ограничений следует:

- выписать *необходимые условия* экстремума

$$\text{grad } F(x) = \partial F(x)/\partial x = 0;$$

- найти решения этих уравнений, которые называют **стационарными точками**;
- отыскать среди стационарных точек решение задачи или доказать, что решения нет.

Чтобы отыскать решение, следует воспользоваться **достаточными условиями** экстремума. Достаточными условиями решения задачи на минимум являются  $\partial F(x)/\partial x = 0$  и положительная определенность **матрицы Гессе**  $\partial^2 F(x)/\partial x^2$ .

Для отыскания решения **задачи с ограничениями в форме равенств**

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n: G(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x))^T = 0\}$$

следует:

- составить **функцию Лагранжа**

$$L(x, \lambda) = F(x) + \lambda^T G(x),$$

в которой  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)^T$  — вектор неопределенных множителей;

- выписать **необходимые условия** экстремума

$$\partial L(x, \lambda)/\partial x = 0; \quad \partial L(x, \lambda)/\partial \lambda = 0;$$

- найти стационарные точки и отыскать среди них решение задачи или доказать, что решения нет.

Задачи оптимизации без ограничений и с ограничениями в форме равенств называют классическими, все остальные задачи оптимизации — неклассическими. Неклассические задачи оптимизации редко могут быть решены аналитически. Основные методы их решения используют **алгоритмы Куна-Таккера, градиентные методы, симплексные алгоритмы и методы прямого поиска** [15].

Стационарные точки экстремальной задачи находятся путем решения уравнения вида  $Q(x) = 0$ , для чего часто используют **рекуррентный метод Ньютона**.

Последовательные приближения этого метода находятся по формуле

$$x_{n+1} = x_n - Q(x_n)/(dQ(x_n)/dx),$$

геометрический смысл которой состоит в том, что точка  $x_{n+1}$  вычисляется как пересечение оси абсцисс с касательной к кривой  $y = Q(x)$  в точке  $x_n$ .

## Примеры

1. В задаче  $x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 \rightarrow \min, x \in \mathbb{R}^3$ , функция  $F(x)$  имеет стационарную точку  $x^* = (0 \ 0)^T$ , поскольку система алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \partial F(x)/\partial x_1 &= 2x_1 - 2x_2 = 0; \\ \partial F(x)/\partial x_2 &= -2x_1 + 8x_2 = 0 \end{aligned}$$

имеет единственное решение. Матрица Гессе

$$\partial^2 F(x)/\partial x^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

имеет два положительных собственных числа и поэтому является положительно определенной. Достаточные условия минимума в точке  $x^*$  выполнены.

$$2. x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1 - 2x_3 \rightarrow \min, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Необходимые условия экстремума:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 1 &= 0; \\ 2x_2 - x_1 &= 0; \\ 2x_3 - 2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда получаем  $x^* = (-2/3, -1/3, 1)^T$  и значение задачи  $F_{\min} = -4/3$ .

3. Найти стационарные точки функции  $F(x) = 0,5(x_1^2 + 4x_2^2)$  при линейном ограничении на переменные:  $g(x) = x_1 + 2x_2 - 1 = 0$ .

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = 0,5(x_1^2 + 4x_2^2) + \lambda(x_1 + 2x_2 - 1).$$

Необходимые условия минимума принимают вид

$$\begin{aligned} \partial L(x, \lambda)/\partial x_1 &= x_1 + \lambda = 0; \\ \partial L(x, \lambda)/\partial x_2 &= 4x_2 + 2\lambda = 0; \\ \partial L(x, \lambda)/\partial \lambda &= x_1 + 2x_2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Эти три алгебраических уравнения с тремя неизвестными имеют единственное решение:  $\lambda = -0,5; \quad x = (0,5 \ 0,25)^T$ .



$$4. e^{xy} \rightarrow \max, V = \{x, y: x + y = 1\}.$$

Составляем функцию Лагранжа:  $L(x, \lambda) = e^{xy} + \lambda(x + y - 1)$  и для нее необходимые условия:

$$\begin{aligned} ye^{xy} + \lambda &= 0; \\ xe^{xy} + \lambda &= 0; \\ x + y - 1 &= 0, \end{aligned}$$

откуда имеем  $x^* = (1/2, 1/2)^T$  и значение задачи  $F_{\max} = e^{0,25}$ .

5. Найти численное значение корня уравнения  $x - \sin x = 0,5p$ .

Используя алгоритм Ньютона, составляем рекуррентную формулу

$$x_{n+1} = x_n - (x_n - \sin x_n - 0,5p) / (1 - \cos x_n).$$

Пусть начальное значение  $x_0 = 2,4$ . Итерационная последовательность, сходящаяся к искомому решению, принимает значения: 2,4; 2,31; 2,3099; 2,309884; ...

### 16.3.2 ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ. ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ

Экстремальные задачи, в которых неизвестными являются функции, решаются методами вариационного исчисления, основу которых составляют классические методы Эйлера, Гамильтона, принцип максимума Понтрягина и метод динамического программирования Беллмана.

Простейшая задача оптимизации функционала без ограничений имеет вид

$$J(x) = \int_0^T F(x, x', t) dt \rightarrow \min, \quad x(0) = x^0, \quad x(T) = x^*,$$

среди всех непрерывно дифференцируемых функций найти такую функцию  $x(t)$ , удовлетворяющую граничным условиям  $x(0) = x^0$ ,  $x(T) = x^*$ , которая минимизировала бы функционал  $J(x)$ .

Для решения этой задачи следует:

- составить необходимые условия экстремума в форме **дифференциального уравнения Эйлера-Лагранжа**

$$\partial F / \partial x - d/dt(\partial F / \partial x') = 0;$$

- найти решения этого уравнения, которые называют **экстремальями**, и среди них те, которые удовлетворяют граничным условиям  $x(0) = x^0$ ,  $x(T) = x^*$ ;
- отыскать среди допустимых экстремалей единственное решение задачи или доказать, что решения нет.

Необходимые условия — уравнения Эйлера-Лагранжа принимают достаточно простой вид, когда целевая функция  $F(x, x', t)$ , имеет частный вид:

- $\partial F / \partial x = 0$ , если  $F(x, t)$ ;
- $\partial F / \partial x' = \text{const}$ , если  $F(x', t)$ ;
- $F - x' \partial F / \partial x' = \text{const}$ , если  $F(x, x')$ .

В отличие от задач минимизации функций, когда необходимые условия представляют собой алгебраические уравнения, необходимые условия минимизации функционалов представляются дифференциальными уравнениями относительно неизвестной функции.

Задачи оптимального управления динамическими системами являются задачами минимизации функционала  $J(x(T, t_0)) \rightarrow \min$  с ограничениями, которые могут задаваться в виде  $u \in U$ ,  $x \in X$ ,  $t \in [t_0, T]$  и уравнения движения  $x' = f(x, u, t)$ .

Формально задача ставится так: найти в множестве допустимых управлений  $U$  такой вектор управления  $u(t)$ , при котором динамическая система  $x' = f(x, u, t)$ , начиная свое движение из состояния  $x^0 = x(0)$ , приходит в состояние  $x(T)$  так, что критерий движения  $J(u) = J(x(T, t_0))$  принимает экстремальное значение.

Для решения таких задач используется **метод множителей Лагранжа**, в котором предполагается использование вспомогательного функционала

$$L(x, u, \lambda) = F(x, x', t) + \lambda^T(t)(f(x, u, t) - x'),$$

где  $\lambda(t)$  — вектор множителей Лагранжа, зависящий от времени.

Необходимые условия минимизации интегрального функционала имеют вид уравнений Эйлера-Лагранжа относительно вспомогательного функционала  $L(x, u, \lambda)$ .

2) максимизировать гамильтониан по  $u(t) \in U_m$

$$\max H(\psi^*, x^*, u) = H^*(\psi^*, x^*),$$

$$u(t) \in U;$$

при этом определить управление как функцию вектора состояния и вспомогательной переменной

$$u^* = u(\psi^*, x^*);$$

3) составить систему однородных дифференциальных уравнений для вспомогательной переменной:

$$\psi' = -\partial H / \partial x;$$

4) для определения оптимального управления  $u^*$  как функции времени следует решить систему дифференциальных уравнений 3), но для этого необходимы начальные условия вектора  $\psi$ , которые неизвестны. Однако в задаче с фиксированными концами известны два крайних значения вектора состояния системы  $x(0)$ ,  $x(T) = x^*$ , что позволяет, используя численные методы найти искомого решение такой *двухточечной краевой задачи*.

### 16.3.4. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Динамическое программирование, созданное и развитое Р. Беллманом, является универсальным методом решения задач оптимального управления непрерывных и дискретных систем. Процедуру метода проиллюстрируем на примере решения задачи оптимального управления в форме Лагранжа со свободным правым концом для непрерывной системы  $\Sigma^n: x' = f(t, x, u)$ ,  $x^0 = x(t_0)$ , для которой необходимо найти допустимое управление  $u(t) \in U^m$ , минимизирующее интегральный критерий качества движения:

$$J(u, x, T) = \int_{t_0}^T F(t, x(t), u(t)) dt.$$

Процедура состоит из четырех шагов:

1) составить функцию Беллмана

$$B(t, x, u, \partial S(x, t) / \partial x) = F(t, x, u) + \text{grad}^T S(x, t) f(t, x, u);$$

2) минимизировать эту функцию по  $u(t) \in U_m$

$$\min B(t, x, u, \partial S(x, t) / \partial x) = B^*(t, x, \partial S(x, t) / \partial x),$$

$$u(t) \in U;$$

при этом определить управление как явную функцию вектора состояния и  $\partial S(x, t) / \partial x$

$$u^* = u(x^*, \partial S(x, t) / \partial x);$$

3) составить уравнение Беллмана

$$B^*(t, x, \partial S(x, t) / \partial x) + \partial S(x^*, t) / \partial t = 0, \quad S(x^*, T) = 0;$$

4) решением этого уравнения является функция  $S(x, t)$ . Определить  $\partial S(x, t) / \partial x$ , а затем  $u^* = u(x^*, \partial S(x, t) / \partial x)$  — искомого оптимальное управление.

• Для решения задачи Лагранжа с закрепленными концами и свободным временем согласно процедуре метода вводится в рассмотрение функция  $R(x)$ , которая совпадает с наименьшим значением критерия вдоль оптимальной траектории от текущего состояния  $x$  до цели  $x^*$ . Эта функция, очевидно, зависит только от текущего состояния. В предположении, что эта функция непрерывно дифференцируема, уравнение Беллмана запишем в следующем виде:

$$\min [F(x(t), u(t)) + \text{grad}^T R(x) f(x(t), u(t))] = 0, \\ u(t) \in U.$$

• Задача максимального быстродействия является частным случаем сформулированной задачи Лагранжа с закрепленными концами и свободным временем, если положить в ней  $F(x(t), u(t)) \equiv 1$ . Содержательный смысл функции  $R(x)$  — наименьшее время, необходимое для перевода системы из текущего состояния  $x(t)$  до цели. Уравнение Беллмана для этой задачи принимает вид

$$\min [\text{grad}^T R(x) f(x(t), u(t))] = -1, \quad R(x^*) = 0, \\ u(t) \in U.$$

• Задача оптимальной стабилизации траектории движения системы состоит в том, чтобы найти такое управление  $u(t)$ , которое бы при любых начальных возмущениях минимизировало

бы текущее отклонение реальной траектории от расчетной, затраты энергии на управление и конечное отклонение траектории от цели. Критерий качества управления в этой задаче имеет вид квадратичного функционала

$$J(u(t)) = 0,5 \int_0^T [x^T(t)R_1x(t) + u^T(t)R_2u(t)]dt + 0,5x^T(T)R_3x(T),$$

где  $R_1, R_2$  — положительные определенные симметрические матрицы;  
 $R_3$  — положительная полуопределенная матрица.

Согласно процедуре метода функциональное уравнение Беллмана принимает вид

$$\partial S(x, t)/\partial t + \min_u 0,5[x^T(t)R_1x(t) + u^T(t)R_2u(t)] + 0,5\text{grad}^T S(x, t)[Ax(t) + Bu(t)]$$

с граничным условием  $S(x(T), T) = 0,5x^T(T)R_3x(T)$ .

Выполнив, используя необходимое условие, операцию минимизации, получим

$$u^*(t) = -R_2^{-1} B^T \text{grad} S(x, t).$$

Для того чтобы оптимальное управление  $u^*(t)$  было линейной формой от вектора состояния, необходимо, чтобы функция  $S(x, t)$  имела вид квадратичной формы

$$S(x, t) = 0,5x^T(t)P(t)x(t),$$

где  $P(t)$  — симметрическая матрица.

В силу этого предположения оптимальное управление принимает вид

$$u^*(t) = -R_2^{-1} B^T P(t) x(t).$$

Матрицу  $P(t)$  можно найти, решив уравнение Риккати, которое получается, если в уравнение Беллмана подставить найденное выражение оптимального управления:

$$P'(t) = P(t)BR_2^{-1} B^T P(t) - P(t)A - A^T P(t) - R_1, \quad P(T) = R_3.$$

Р. Калман доказал, что решение этого уравнения  $P(t)$  единственно и уравнение Беллмана оказывается необходимым и достаточным условием оптимальности найденного управления. Кроме того, Калман показал, что при  $T \rightarrow \infty$  для стационарной вполне управляемой линейной системы матричное дифференциальное уравнение Риккати сводится к алгебраическому

$$PA + A^T P - PBR_2^{-1} B^T P + R_1 = 0,$$

решение которого определяет постоянную матрицу  $P^*$  и оптимальное управление в замкнутой форме

$$u^*(t) = -K x(t),$$

где  $K = R_2^{-1} B^T P^*$  — матрица обратной связи.

## 16.4. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

*Основные понятия и характеристики случайных величин — Определение и характеристики случайных процессов — Примеры.*

### 16.4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

*Случайная величина*  $\zeta(\omega)$  есть функция результата опыта или наблюдения  $\omega$ , взятого из пространства возможных элементарных событий.

Случайная величина задана, если известны вероятности событий  $\{x_i \leq \zeta < x_j\}$  для любых  $x_i < x_j$ . Различают *дискретные и непрерывные случайные величины*. В первом случае  $\zeta$  может принимать конечное или счетное множество значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с соответствующими вероятностями  $P\{\zeta = x_k\} = p_k$ , во втором случае  $\zeta$  может принимать любое значение из непрерывного множества и поэтому задается плотностью вероятностей  $f(x)$ .

Распределение вероятностей случайной величины задается функцией  $F(x) = P\{\zeta < x\}$ , называемой *функцией распределения*:

$$F(x) = \sum_{p_k, x_k < x} \text{— для дискретной случайной величины;}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \text{— для непрерывной случайной величины.}$$

Числовыми характеристиками распределения вероятностей случайной величины являются ее **математическое ожидание**  $M\zeta$ , **дисперсия**  $D\zeta = M(\zeta - M\zeta)^2$  и вообще совокупность **моментов распределения**  $M\zeta^s$ ,  $M(\zeta - M\zeta)^s$ ,  $s = 1, 2, \dots$  начальные и центральные. Начальные моменты  $M\zeta^s$ ,  $s = 1, 2, \dots$  вычисляются по выражениям

$$M\zeta^s = \sum_k x_k^s p_k \text{ — для дискретной случайной величины;}$$

$$M\zeta^s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx \text{ — для непрерывной случайной величины.}$$

Очевидно, первый начальный момент — математическое ожидание  $M\zeta$ , второй центральный момент — дисперсия  $D\zeta = M\zeta^2 - (M\zeta)^2$ . Математическое ожидание обладает линейным свойством:

$$M(a\zeta + b\eta) = aM\zeta + bM\eta.$$

**Векторная случайная величина**  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^T$  принимает значения  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  в  $n$ -мерном пространстве и каждая из величин  $x_1, x_2, \dots$  этого вектора является одномерной случайной величиной. Функция распределения векторной случайной величины определяется в виде

$$F(x) = P\{\zeta_1 < x_1, \zeta_2 < x_2, \dots, \zeta_n < x_n\}.$$

#### 16.4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

**Случайный, или стохастический, процесс**  $\zeta(t)$  есть случайная функция независимой переменной  $t$ . Каждое испытание дает определенную **реализацию**  $x(t)$  случайного процесса, поэтому случайный процесс рассматривают как совокупность всевозможных реализаций данного процесса. Случайный процесс можно рассматривать и как совокупность одномерных случайных величин  $\{\zeta(t_1), \zeta(t_2), \dots\}$  в моменты времени  $t_1, t_2, \dots$ . При этом задаются одномерные распределения всех этих величин.

Случайный процесс может быть дискретным или непрерывным в зависимости от вида распределений  $\zeta(t_1), \zeta(t_2), \dots$ . Стохастический процесс называется **случайной последовательностью**, если переменная  $t$  принимает дискретные значения.

Случайный процесс описывается совокупностью совместных распределений вероятностей случайных величин  $\zeta(t_1), \zeta(t_2), \dots$  для всевозможных моментов времени  $t_1, t_2, \dots$

Стационарные случайные процессы имеют неизменные во времени вероятностные характеристики, в частности, при любых  $t, s$  случайные величины  $\zeta(t), \zeta(s)$  имеют одинаковые распределения. Характеристиками случайного процесса являются:

а) **среднее по множеству реализаций:**

$$M\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x, t) = m(t);$$

б) **среднее по времени:**

$$\bar{\zeta}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/(2T) \int_{-T}^T x(t) dt;$$

в) **корреляционная функция**  $M[\zeta(t_1) - m(t_1)][\zeta(t_2) - m(t_2)] = R_{\zeta}(t_1, t_2)$ .

Для стационарного стохастического процесса

$$R_{\zeta}(t_1, t_2) = R_{\zeta}(t_2 - t_1 = \tau) = R_{\zeta}(\tau).$$

Стационарный процесс называется **эргодическим**, если достоверно, что среднее по множеству совпадает со средним по времени:  $\bar{\zeta}(t) = m(t)$ .

Для эргодических процессов с нулевым средним корреляционная функция может быть вычислена по формуле

$$R_{\zeta\zeta}(\tau) = M[\zeta(0)\zeta(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/(2T) \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt.$$

Корреляционная функция  $R_{\zeta}(\tau)$  обладает свойствами:

$$R_{\zeta\zeta}(\tau) = R_{\zeta\zeta}(-\tau); |R_{\zeta\zeta}(\tau)| \leq R_{\zeta\zeta}(0) = M\zeta^2 = D\zeta.$$

**Взаимная корреляционная функция** двух стационарных случайных процессов  $\zeta(t), \eta(t)$  определяется формулой

$$R_{\zeta\eta}(\tau) = M[\zeta(0)\eta(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/(2T) \int_{-T}^T x(t)y(t + \tau)dt,$$

Взаимная корреляционная функция  $R_{\zeta\eta}(\tau)$  обладает свойствами:

$$R_{\zeta\eta}(\tau) = R_{\eta\zeta}(-\tau); \quad |R_{\zeta\eta}(\tau)|^2 \leq R_{\zeta\zeta}(0)R_{\eta\eta}(0) = D_{\zeta}D_{\eta}.$$

Взаимные корреляционные функции  $R_{\zeta\eta}(\tau)$ ,  $R_{\eta\zeta}(\tau)$  уравнивают меру связи между случайными процессами, разделенными интервалом времени  $\tau$ . Функции  $R_{\zeta\zeta}(\tau)$ ,  $R_{\zeta\eta}(\tau)$ ,  $R_{\eta\zeta}(\tau)$ ,  $R_{\eta\eta}(\tau)$  образуют **корреляционную матрицу**.

**Спектральная плотность**  $S_{\zeta\zeta}(\omega)$  случайного процесса  $\zeta(t)$  определяется соотношением Хинчина-Винера как преобразование Фурье от корреляционной функции  $R_{\zeta\zeta}(\tau)$ :

$$S_{\zeta\zeta}(\omega) = F[R_{\zeta\zeta}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\zeta\zeta}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} R_{\zeta\zeta}(\tau) \cos \omega\tau d\tau.$$

Спектральная плотность процесса обладает свойствами:

$$S_{\zeta\zeta}(\omega) \geq 0, \quad S_{\zeta\zeta}(\omega) = S_{\zeta\zeta}(-\omega).$$

Взаимные спектральные плотности случайных процессов  $S_{\zeta\eta}(\omega)$ ,  $S_{\eta\zeta}(\omega)$  определяются как преобразование Фурье от соответствующих взаимных корреляционных функций:

$$S_{\zeta\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\zeta\eta}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad S_{\eta\zeta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\eta\zeta}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Корреляционные функции могут быть вычислены как обратное преобразование Фурье от соответствующих спектральных плотностей, например:

$$R_{\zeta\zeta}(\tau) = F^{-1}[S_{\zeta\zeta}(\omega)] = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\zeta\zeta}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \pi^{-1} \int_0^{\infty} S_{\zeta\zeta}(\omega) \cos \omega\tau d\omega.$$

### 16.4.3. ПРИМЕРЫ

1. Дискретная случайная величина  $\zeta$  имеет распределение:

а) **Бернулли**, если она принимает значения  $x = 0, 1, 2, \dots, n$  с вероятностями:

$$P\{\zeta = x\} = C_n^x \mu^x (1 - \mu)^{n-x}, \quad 0 \leq \mu \leq 1;$$

б) **Пуассона**, если она принимает значения  $x = 0, 1, 2, \dots$  с вероятностями

$$P\{\zeta = x\} = e^{-\lambda} \lambda^x / x!, \quad \lambda > 0.$$

Непрерывная случайная величина  $\zeta$  имеет распределение:

а) **экспоненциальное**, если ее плотность распределения вероятностей описывается выражением

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0;$$

б) **нормальное (Гаусса)**, если ее плотность распределения вероятностей описывается выражением

$$f(t) = 1/(\sigma^2 2\pi)^{0.5} \exp(-(t - a)^2 / 2\sigma^2); \quad \sigma > 0, \quad a \text{ — любое число.}$$

2. Математическое ожидание случайной величины, распределенной:

а) по Пуассону,

$$M\zeta = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \lambda^x / x! = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \lambda^{x-1} / (x-1)! = \lambda;$$

б) по Гауссу,

$$M\zeta = 1/(\sigma^2 2\pi)^{0.5} \int_{-\infty}^{\infty} t \exp(-(t - a)^2 / 2\sigma^2) dt \Big|_{(t-a)/\sigma} = 1/(2\pi)^{0.5} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + a) \exp(-z^2 / 2) dz = a.$$

3. Случайный гармонический процесс  $\zeta(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$ , в котором амплитуда постоянна, а фаза  $\alpha$  — равномерно распре-

ленная на  $[-\pi, \pi]$  случайная величина. Этот процесс стационарный и эргодический с нулевым средним и  $R_{\zeta\zeta}(\tau) = 0,5A^2 \cos(\omega_0\tau)$ . Если  $A$  — случайная величина с ненулевым средним  $m$ , а фаза постоянна, то такой процесс стационарный, но не эргодический:  $\tilde{\zeta}(t) = 0$ ,  $M\zeta(t) = m$ .

4. Рассматривается бинарный случайный процесс, принимающий только два значения  $\pm A$ , сменой знака в нем управляет пуассоновский случайный процесс с параметром  $0,5\lambda$ . Данный процесс стационарный и эргодический. Его среднее равно нулю, корреляционная функция:

$$R_{\zeta\zeta}(\tau) = A^2 e^{-\lambda|\tau|}$$

и спектральная плотность:

$$S_{\zeta\zeta}(\omega) = A^2 \left( \int_{-\infty}^0 e^{\lambda\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \right) = 2A^2 \lambda / (\omega^2 + \lambda^2).$$

5. Дисперсия случайного процесса  $\zeta(t)$  с нулевым средним, имеющего спектральную плотность  $S_{\zeta\zeta}(\omega)$  и корреляционную функцию  $R_{\zeta\zeta}(\tau)$ , может быть найдена по формулам

$$D\zeta(t) = M\zeta^2(t) = R_{\zeta\zeta}(0);$$

$$D\zeta(t) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} S_{\zeta\zeta}(\omega) d\omega.$$

6. Стационарный эргодический процесс с нулевым средним и неизменной спектральной плотностью  $S_{\zeta\zeta}(\omega) = a^2$  называют **белым шумом** интенсивностью  $a^2$ . Этот процесс является идеальной моделью. Реальные процессы, близкие к белому шуму, имеют ограниченную по полосе частот спектральную плотность:

$$S_{\zeta\zeta}(\omega) = a^2, \quad |\omega| < \omega_0, \quad \text{иначе } S_{\zeta\zeta}(\omega) = 0.$$

Корреляционная функция такого называемого **цветным шумом** случайного процесса задается выражением

$$R_{\zeta\zeta}(\tau) = a^2 \omega_0 / \pi \sin(\omega_0\tau) / (\omega_0\tau).$$

## 16.5. ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Современные средства для анализа, синтеза и автоматизированного проектирования систем управления представляются достаточно большим числом интерактивных программных пакетов [16], разнообразие которых не только в списке решаемых задач моделирования, идентификации, анализа и синтеза различных систем, но и в сервисных возможностях этих средств.

Инструментальные программные средства автоматизированного исследования и проектирования систем управления позволяют выполнять математические операции над матрицами и полиномами, составлять и преобразовывать математические модели непрерывных и дискретных, линейных и нелинейных систем, вычислять динамические характеристики этих моделей, строить годографы и анализировать свойства систем управления, определять полюса и нули системы, идентифицировать модели, выполнять оптимальный синтез систем с заданными показателями качества управления в условиях присутствия или отсутствия помех.

Программные средства обладают развитой интерактивной графикой, позволяющей строить функциональные зависимости, фазовые кривые и фазовые портреты исследуемых процессов, изменять масштабы зависимостей линейно или логарифмически, изображать и преобразовывать структурные модели систем, дополнять графику текстовым сопровождением, выполнять статистический анализ и представление результатов исследования.

Среди всего многообразия пакетов отметим те, что ориентированы на использование персональных вычислительных средств и могут быть использованы при проведении лабораторных работ, в курсовом и дипломном проектировании: **MARS** (Украина, Институт кибернетики; Россия, Московский инженерно-физический институт); **ПДС** (Россия, Московский государственный технический университет); **КЛАССИК** (Россия, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет); **МАСС** (Россия, Московский энергетический институт); более мощные профессиональные пакеты представляют **ЭКСПРЕСС-РАДИУС** (Россия, Институт проблем управления РАН); **TUTSIM**, **MATRIXx** (USA, Integrated Systems, Inc.); **SIMULINK-MATLAB**

(USA, MathWorks, Inc.), **KEDDC** (Germany, Ruhr University), **CLADP** (England, Cambridge University), **SIMNON** (Sweden, Lund Institute of Technology) [16].

Интерактивный программный комплекс **SIMULINK** позволяет создавать математические модели любых динамических систем и исследовать реакции этих систем на любые внешние воздействия и помехи. Для этого комплекс располагает командами изменения структуры модели и ее параметров; командами одиночного и многократного запуска, останова и продолжения процесса моделирования; командами вывода графиков и числовых данных на дисплей, принтер или в файл; командами настройки и сохранения модели; командами сервиса, позволяющими включать программы пользователя, выводить на экран комментарии к результатам моделирования. Комплекс располагает большим числом различных функциональных блоков для моделирования непрерывных и дискретных, линейных и нелинейных операторов, генерирования детерминированных и стохастических воздействий, выполнения логических условий и функций, оптимизации и аппроксимации функций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

---

1. **Теория** автоматического управления: Учеб. для вузов. В 2 ч. / Под ред. А.А. Воронова. — М.: Высшая школа, 1989.
2. **А. Брайсон, Хо Ю-Ши.** Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972.
3. **Х. Квекернаак, Р. Сиван.** Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977.
4. **Толчеев Ю.И.** Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. — М.: Машиностроение, 1989.
5. **Макаров И.М., Менский Б.М.** Линейные автоматические системы (Элементы теории, методы расчета и справочный материал). — М.: Машиностроение, 1982.
6. **Степанов В.В.** Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1958.
7. **Цыпкин Я.З.** Основы теории автоматических систем. — М.: Наука, 1977.
8. **Нелинейные** системы автоматического управления / Под ред. Е.П. Попова. — М.: Машиностроение, 1970.
9. **Дёч Г.** Руководство по практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. — М.: Наука, 1971.
10. **К. Острём, Б. Виттенмарк.** Системы управления с ЭВМ. — М.: Мир, 1987.
11. **Андреев Ю.Н.** Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976.
12. **Д. Сю, А. Мейер.** Современная теория автоматического управления и ее применение. — М.: Машиностроение, 1972.
13. **К.-П. Шульце, К.-Ю. Реберг.** Инженерный анализ адаптивных систем. — М.: Мир, 1992.
14. **П. Эйхгофф.** Основы идентификации систем управления. — М.: Мир, 1975.
15. **Д. Химмельблау.** Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975.
16. **Автоматизированное** проектирование систем управления

- ния / Под ред. М. Джамшиди и др.: Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1989.
17. **Теория** автоматического управления: Учеб. для вузов. В 2 ч. / Под ред. А.В. Нетушила. — М.: Высшая школа, 1976.
18. **Сборник** задач по теории автоматического управления / Под ред. В.А. Бесекерского. — М.: Наука, 1983.
19. **Ройтенберг Я.Н.** Автоматическое управление. — М.: Наука, 1982.
20. **Б. Куо.** Теория и проектирование цифровых систем управления. — М.: Машиностроение, 1986.
21. **Алексеев А.А., Имаев Д.Х., Кузьмин Н.Н., Яковлев В.Б.** Теория управления. — СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 1999.
- Автоколебания** 245
- Автокорреляционная функция** 457
- Адаптивная система** 410
- Алгоритм**
- аналитического конструирования регулятора 287
  - Гаусса-Зайделя 416
  - векторной оптимизации 416
  - Ньютона решения уравнения 446
  - скалярной оптимизации 415
- Андронов А.А.** 25
- Аппроксимация**
- дискретная непрерывной системы 74
  - Тустена 315
  - Эйлера 315
- Астатизм системы** 182
- Бербашин Е.А.** 231
- Беллман Р.** 25, 382.
- Билинейное преобразование** 212
- Боголюбов Н.А.** 25
- Бодэ А.** 139
- Быстродействие оптимальное** 370
- Ван-дер-Поль** 97
- Вектор**
- входа 30
  - выхода 30
  - состояния 30
  - фазовой скорости 102
- Взаимная корреляционная функция** 457.
- Винер Н.** 25, 343

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Воздействие**
- возмущающее 11
  - гармоническое 135
  - линейное 135
  - управляющее 11
- Возмущение** 11
- Возмущенное движение** 42
- Восстановление дискретного сигнала** 70
- Временные характеристики** 136
- Время**
- первого максимума 191
  - переходного процесса 191
- Вынужденный процесс** 180
- Вышнеградский И.А.** 169
- Гамильтониан** 376
- Годограф**
- корневой 171
  - Михайлова 160
  - Найквиста 140
  - частотный 140
- Гольдфарб Л.С.** 246
- Гурвиц А.** 24, 157
- Движение системы**
- оптимальное 369
  - программное 19
- Двойственность** 126
- Дельта-функция Дирака** 134
- Джури Э.** 213
- Дискретная система**
- модель внешняя 74
  - модель внутренняя 72
- Дискретное представление непрерывной системы** 71
- Дисперсия** 456
- Доминирующие полюса** 192



Допустимое управление 369  
D-разбиение пространства параметров 167

#### Задача

- Айзермана-Лурье 234
- оптимального управления 369

Закон управления 12

Замкнутая система управления 20

Запас устойчивости

- по амплитуде 165
- по фазе 165

Звено динамическое типовое

- дифференцирующее 144
- запаздывания 149
- инерционное 144
- интегрирующее 142
- колебательное 146
- неминимально-фазовое 150
- пропорциональное 142
- форсирующее второго порядка 148
- форсирующее 145

*Ивэнс Р.* 171

Идентификация системы параметрическая 357

Импульсная переходная характеристика 136

Импульсный элемент идеальный 83

Интегральные оценки качества 187

*Калман Р.* 123

Качество процессов управления

- основные показатели 185
- Квадратичная форма 436
- Классификация автоматических систем 22
- Квантование
- непрерывной системы 71
  - по времени 82

*Колмогоров А.Н.* 25

Комплексный коэффициент усиления 140

Корректирующее устройство 262

Коэффициенты линеаризации

- гармонической 114
- касательной 112
- стохастической 117

Коэффициенты ошибки 181

*Красовский Н.Н.* 231

Критерий

- Калмана управляемости и наблюдаемости
  - линейной дискретной системы 205
  - линейной непрерывной системы 124
- *Ляпунова* устойчивости нелинейной системы в малом 226
- *Полова* абсолютной устойчивости нелинейной системы 237
- *Сильвестра* 437
- устойчивости дискретной системы 212
  - *Джури* 213
- устойчивости алгебраический линейной непрерывной системы
  - *Гурвица* 157
  - *Зубова* 158
  - *Рунса* 158
- устойчивости частотный линейной дискретной системы *Найквиста* 214
- устойчивости частотный линейной непрерывной системы
  - *Бодэ* 162
  - *Михайлова* 160
  - *Найквиста* 160

*Крылов Н.М.* 25

*Лёттов А.М.* 287

Линеаризации методы 112

Линейная форма 436

Линия переключения

оптимального управления 397

*Лузин Н.Н.* 25

*Лурье А.И.* 234

*Люинбергер Д.* 301

*Ляпунов А.М.* 25

Матрица

- *Гессе* 446
- *Гурвица* 157
- знакоопределенная 437
- *Зубова* 158
- наблюдаемости 124
- основные понятия 433
- переходная 136
- управляемости 124
- *Якоби* 438

Метод

- Беллмана динамического программирования 382
- гармонической линеаризации 113
- *Гаусса* наименьших квадратов 358
- изоклин 106
- коэффициентов *Лагранжа* 446
- *Лёттова* аналитического конструирования регуляторов 287
- оптимизации векторный 414
  - *Ньютона—Рафсона* 417
  - сопряженных направлений 416
- последовательной коррекции 262
- скалярной оптимизации 415
- стохастической линеаризации 112

*Михайлов А.В.* 160

Модель математическая системы 30

Модифицированная частотная характеристика 237

Модуляция 82

Моменты квантования 70

Наблюдаемость

- линейной дискретной системы 207
- линейной непрерывной системы 124

Наблюдатель *Люинбергера* асимптотический 301

*Найквист Г.* 25

Нелинейная система 93

Нелинейный элемент 98

Номограммы замыкания 141

Норма вектора 439

Нули системы 46

Область устойчивости параметрическая 167

Обратная связь 12

Объект управления 11

Оператор

- дифференцирования *Коши* 46
  - сдвига разностный 76
- Оптимальное управление 294
- Оптимальный регулятор 293
- Особая точка 102
- Острём К.* 25
- Оценка качества переходного процесса 185
- Ошибка
- статическая 182
  - установившаяся 180

Парабола *Полова* 239

Передаточная функция 46

Переменные состояния 11

Переходная матрица 136

Переходные характеристики 136

Переходный процесс 185

*Петров Б.Н.* 25

Поле изоклин 106

Полином *Вышнеградского* 169

Полная производная по времени в силу системы 229

Полюса системы 46  
*Понтрягин Л.С.* 25  
*Попов В.-М.* 25  
Предельный коэффициент усиления 165  
Предельный цикл 111  
Преобразование

- аналого-цифровое 70
- Z-дискретное 443
- *Лапласа* 442
- *Мёбиуса* 212
- факторизации 343
- *Фурье* 458

Принцип

- максимума *Понтрягина* 376
- оптимальности *Беллмана* 382
- суперпозиции 93
- управления 20

Пространство

- линейное векторное 439
- параметрическое 165
- фазовое 102

Предельный цикл 247  
Процесс случайный 456  
Прямая *Полова* 238  
*Пуанкаре А.* 25  
  
Ранг матрицы 436  
*Раус Э.* 24  
Реакция системы 134  
Регулятор системы

- адаптивный 426
- оптимальный 294
- П, И, ПИ, ПД, ПИД 269
- цифровой 314

Релейная характеристика 99  
Робастность системы 133  
  
Сигнал

- возмущения 11
- единичный
  - импульсный *Дирака* 134
  - линейный 135
  - ступенчатый *Хевисайда* 134
- стохастический 455

• управления 11  
Система

- автоматического управления 12
- автономная нелинейная 94
- адаптивная 426
- с апериодической реакцией 324
- дискретная 69
- квазиоптимальная 402
- линейная 31
- оптимальная
  - по быстродействию 396
  - по квадратичному критерию 392
- переменной структуры 402
- программного управления 19
- следящая 19
- стабилизации 19
- экстремальная 411

Скользкий режим 402  
След матрицы 436  
Случайный процесс 456  
Собственные значения матрицы 435  
Спектр матрицы 435  
Спектральная плотность 458  
Стохастические системы управления 335  
Структурная схема системы 12  
  
Теорема

- *Гамильтона-Кэли* 437
- *Барбашина-Красовского* 231
- *Калмана* управляемости и наблюдаемости
  - непрерывной системы 123
  - дискретной системы 205
- *Ляпунова* об асимптотической устойчивости нелинейной системы 227
- *Понтрягина* оптимального управления 377
- *Полова* абсолютной устойчивости нелинейной системы 237

• *Харитонова* о робастной устойчивости 134  
Теория автоматического управления 11  
Траектория движения

- корней системы 171
- фазовая 102

Управляемость 123  
Уравнение

- *Беллмана* 384
- *Ван дер Поля* 97
- *Винера-Хопфа* 343
- *Риккати* 296
- состояния 30
- характеристическое 435
- чувствительности 130
- *Эйлера-Лагранжа* 372

Условия

- *Гольдфарба* возникновения автоколебаний 246
- трансверсальности 295
- установившийся процесс 180

Устойчивость

- абсолютная 225
- автоколебаний 247
- асимптотическая 127
- в большом 229
- в малом 226
- в целом 229
- положения равновесия 227
- по *Ляпунову* 127
- робастная 133

Фазовый портрет системы 95  
Фильтр

- *Винера* 342
- *Калмана-Бьюси* 352

Функционал качества 369  
Функция

- знакоопределенная 436
- импульсная 136

• корреляционная 457  
• *Ляпунова* 229  
• передаточная 46  
• переходная 136  
• решетчатая 70  
• чувствительности 130

Характеристики частотные линейной системы 138

- амплитудная 139
- амплитудно-фазовая 140
- вещественная 139
- логарифмические 140
- мнимая 139
- фазовая 139

Характеристический полином системы 141

Цифровая система управления 69  
*Цыпкин Я.З.* 25

Частота

- автоколебаний 247
- резонансная 147
- собственная 146
- среза 165

Числа

- собственные матрицы 435
- характеристические системы 141

Чувствительность параметрическая 129

Шум белый гауссов 460

*Щипанов Г.В.* 25

Экстраполятор нулевого порядка 71

Энергия полная системы 229

Экстремальная система регулирования 411

Эталонная модель 426

---

---

ВЫСШЕЕ ГОРНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

---

---

Леонид Давидович Певзнер

**ТЕОРИЯ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

*Режим выпуска «стандартный»*

Редактор текста *А.Н. Сытдыкова*  
Компьютерная верстка, подготовка оригинал-макета,  
дизайн переплета: *Е.Б. Капралова*

*Диапозитивы изготовлены в Издательстве МГТУ*

Подписано в печать 08.01.2002. Формат 60x90/16. Бумага офсетная  
№ 1. Гарнитура «Times». Печать офсетная. Уч.-изд. л. 31,86. Усл.  
печ. л. 29,5. Тираж 1000 экз. Заказ № 17.



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ГОРНОГО УНИВЕРСИТЕТА

*Лицензия на издательскую деятельность ЛР № 062809 от 30.06.98 г.  
Код издательства 5X7 (03)*

*Отпечатано в ФГУП «Московская типография № 6» Минпечати РФ,  
109088, Москва, Южнопортовая ул., 24*

*Магниеые штампы изготовлены в Первой Образцовой типографии*

---

---

**119991, Москва, ГСП-1, Ленинский проспект, 6; Издательство МГТУ;  
тел. (095) 236-97-80; факс (095) 956-90-40**